BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

D-lui Profesor Myller,
În amintirea muncii noastre în Ardeal,
N. Abramescu,
Cluj, 1926.

FACULTATEA DE ȘTIINȚE. UNIVERSITATEA DIN CLUJ.

INTRODUCERE ELEMENTARĂ

ÎN

STUDIUL ANALITIC

AL

GEOMETRIILOR NEEUCLIDIENE

LECȚIUNI PROFESATE

Universitatea din Iași
Seminarul Matematic
1926:189

DE

N. ABRAMESCU
PROFESOR LA FACULTATEA DE ȘTIINȚE.

CLUJ,
1926.

BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

UNIVERSITATEA DIN IAȘI
SEMINARUL MATEMATIC

ÎNTRODUCERE ELEMENTARĂ ÎN STUDIUL ANALITIC AL GEOMETRIILOR NEEUCLIDIENE

GENERALITĂȚI. ISTORIC.

Nemuritorului Euclide îi revine gloria de a fi fixat definițiile, principiile Geometriei uzuale într'o lucrare care și astăzi se bucură de o celebritate, pe care nici o carte de știință n'a putut să o ajungă.

Datorită experienței, geometrii vechi, ajutați de un număr oarecare de noțiuni primitive, de axiome, sau de postulate fundamentale, au pus bazele Geometriei uzuale. Poate că predecesorii lui Euclide au admis un număr supraabondent de postulate, dar Euclide este acela care a redus numărul lor la minimul necesar, iar toate celelalte sunt consecințe ale celor dintâi.

Postulatele lui Euclide sunt absolut rigoroase, și în practică experiența noastră nu poate să contrazică nici una din consecințele lor. Dar, cu vremea, s'a pus întrebarea, ce ar rezulta, dacă vreunul din aceste postulate n'ar fi adevărat, sau ar fi înlocuit cu altul mai general

În special, postulatul paralelelor pare mai puțin evident ca celelalte, și, din antichitate, s'au căutat demonstrațiuni care să înlăture ce fel de îndoială în ce privește Geometria Euclidiană. Astfel de încercări au fost făcute de Posidonius (I secol înainte de Crist.), Ptolemeu (II secol după Cr), Prochus (V secol); apoi la Arabi, Al-Nirizi (IX secol), Nassiredin (XIII secol); începând cu Renașterea, Commandin (1509–1575), Clavius

(1537 - 1612), Cataldi (1548-1626), Borelli (1608-1679), Giordano Vitale (1633-1711), Wallis (1616-1713).

Precursorii Geometriei necuclidiene sunt Sacherri (1667-1733), Lambert (1728-1777), Legendre (1752-1833).

Printre fondatorii Geometriei necuclidiene sunt Gauss (1777-1855), SchweiKart (1780-1859), Taurinus (1794-1874). Dar primul care pune bazele unei noi geometrii, este LobatchefsKy (1793-1856), care expune principiile în 1829, și trei ani mai târziu, Bolyai (1802-1860), expune într'o formă extrem de condensată Geometria LobatchefsKiană, care se mai zice și Geometria necuclidiană.

După Euclide, suma unghiurilor unui triunghi este egală cu două unghiuri drepte; în Geometria LobatchefsKiană, această sumă este inferioară la două drepte și cu atât mai mică cu cât aria triunghiului este mai mare, astfel că într'un triunghi ale cărui vârfuri sunt la distanță foarte mare, suma unghiurilor este zero. În Geometria euclidiană, printr'un punct se poate duce o singură paralelă la o dreaptă; în Geometria LobatchefsKiană, printr'un punct se pot duce două paralele la o dreaptă, adică două linii care să taie această dreaptă de o parte și de alta în puncte infinit depărtate, o infinitate de secante și o infinitate de nesecante. Dreptele trecând prin acelaș punct exterior și situate între cele două paralele nu taie dreapta dată. În această Geometrie LobatchefsKiană i se atribue liniei drepte două puncte la infinit, de aceea se mai zice și iperbolică.

Fondatorii Geometriei iperbolice nu întrezăriră posibilitatea altor geometrii, diferite de Geometria euclidiană. Numai Riemann (1825-1866), în anul 1854, indică fundamentele unei alte geometrii, numită Geometria Riemanniană, sau eliptică. În această geometrie, două drepte din același plan au totdeauna un punct comun, adică nu există paralele, iar suma unghiurilor unui triunghi este superioară la două drepte. În rezumat, o dreaptă în această geometrie este o linie închisă care revine asupra ei însăși, n'are nici un punct la infinit, de aceea se zice geometrie eliptică.

În Geometria euclidiană o dreaptă are două puncte la infinit care coincid, de aceea se zice geometrie parabolică.

Cercetări ulterioare au arătat că se pot concepe atâtea geometrii, câte sisteme de postulate există și care să nu fie supuse la contrazicere. S'a studiat alături de Geometria eliptică și iperbolică și alte multe geometrii, dar aceste două geometrii sunt independente de postulatul paralelelor și de infinitatea dreptei și se asemănă mai mult cu Geometria euclidiană.

S'a căutat să se dea o reprezentare aproape perfectă acestor două geometrii în spațiul euclidian. Astfel, după cum Geometria plană a lui Riemann este analoagă cu geometria pe o sferă (sau mai general pe suprafețe cu curbură constantă pozitivă), în care cercurile mari ale sferei sunt asimilate cu dreptele, Beltrami, în 1868, arătă că Geometria plană LobatchefsKiană

este realizată pe o suprafață particulară (sau mai general pe suprafețe cu curbură constantă negativă), ale căror linii geodezice compun figuri cu două dimensiuni asemănătoare cu figurile plane. Cercetări de acelaș fel, cu mult mai întinse ca acestea, au fost făcute de De Tilly, începând de la 1878.

În cele ce urmează, vom face o introducere elementară în studiul analitic al acestor două geometrii neeuclidiene, expunând principiile Geometriei concepute de marele geometru Cayley (1821–1895) și arătând cum geometriile euclidiană, lobatchefskiană și riemaniană sunt cazuri particulare ale Geometriei Cayleyene.

Pentru alte cercetări asupra Geometriilor neeuclidiene, se pot consulta:

Klein, [Mathematische Annalen, Bd. 4 (1871), p. 577]; Sur la Géométrie dite non euclidienne (Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques, 1-e série, t. II, 1871, p. 341);

P. Mansion, Premiers principes de la métagéométrie ou géométrie générale (Paris, 1896); Essai d'exposition élémentaire des principes fondamentaux de la géométrie non euclidienne de Riemann (Mathesis, 2-e série, t. 5, supplément; 1895);

Gérard, Sur la Géométrie non euclidienne (Nouvelles Annales de Mathématiques, 3-e série, t. 12; 1893);

Barbarin, La géométrie non euclidienne (Paris, Scientia; 1902);

Bonola, Geometria non euclidea (Bologna, Zanichelli; 1906);

Sommerville, Bibliography of non-euclidian geometry (London; 1911);

Liebmann, Nichteuklidische geometrie (Berlin, Sammlung Schubert; 1912);

Sommerville, The elements of non euclidian geometry (London; 1914);

Turc, Introduction élémentaire à la Géométrie Lobatschewskienne (Genève, Librairie Kündig; 1914);

Carslaw, The elements of non-euclidean plane geometry and trigonometry (London; 1916);

Darboux, Principes de Géométrie analytique (Paris, 1917; pag. 290);

Mac Lesd, Introduction à la Géométrie non euclidienne (Paris, Hermann; 1922).

NOȚIUNI INTRODUCTIVE.

ELEMENTE DELA INFINIT. ELEMENTE IMAGINARE.

1. ELEMENTE DE LA INFINIT. Să însemnăm cu (x,y,z) coordonatele carteziene ale unui punct M raportat la un triedru $Oxyz$. Cantitățile X,Y,Z,T, care verifică relațiile

$$x=\frac{X}{T},\quad y=\frac{Y}{T},\quad z=\frac{Z}{T},$$

se zic coordonatele omogene ale punctului M. Dacă $T=0$, cel puțin una coordonatele x,y,z ale punctului devin infinit de mari, atunci punctul este aruncat la infinit.

Dacă un punct $M(x,y,z)$ este pe dreaptă de parametrii directori (a,b,c), coordonatele sale sunt de forma

$$x=x_0+a\rho,\quad y=y_0+b\rho,\quad z=z_0+c\rho,$$

poziția pe dreaptă fiind determinată de ρ. Putem lua pentru coordonatele omogene ale punctului M valorile

$$X=\frac{x_0+a\rho}{\rho},\quad Y=\frac{y_0+b\rho}{\rho},\quad Z=\frac{z_0+c\rho}{\rho},\quad T=\frac{1}{\rho}.$$

Dacă M se depărtează la infinit pe dreapta considerată, atunci $\rho\to\infty$, iar coordonatele omogene ale punctului de la infinit al dreptei de parametrii directori (a,b,c), sunt

$$X=a,\quad Y=b,\quad Z=c,\quad T=0,$$

și deci două paralele au același punct la infinit.

Ecuația planului în coordonate omogene este

$$AX+BY+CZ+DT=0,$$

iar $T=0$ reprezintă, în coordonate omogene, planul de la infinit.

Ecuațiile

$$AX+BY+CZ+DT=0,\quad (A^2+B^2+C^2\neq 0),\quad T=0,$$

reprezintă dreapta de la infinit a planului $AX+BY+CZ+DT=0$.

Ecuația unei suprafețe în coordonate carteziene fiind $f(x,y,z)=0$, în coordonate omogene se obține înlocuind pe x,y,z cu $\frac{X}{T}$, $\frac{Y}{T}$, $\frac{Z}{T}$ și devine $F(X,Y,Z,T)=0$, o ecuație omogenă în raport cu X,Y,Z,T, de unde și numele de coordonate omogene. Făcând în această ecuație $T=1$, obținem ecuația acestei suprafețe în coordonate carteziene.

Însemnând cu $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ coordonatele a două puncte, acelea ale unui punct al dreptei M_1M_2 sunt

$$(1)\qquad \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Dacă (X_1, Y_1, Z_1, T_1), (X_2, Y_2, Z_2, T_2) sunt coordonatele omogene ale punctelor M_1 și M_2, expresiunile (1) sunt de forma

$$\frac{\frac{X_1}{T_1}+\lambda\frac{X_2}{T_2}}{1+\lambda}=\frac{X_1+\lambda\frac{T_1}{T_2}X_2}{T_1+\lambda\frac{T_1}{T_2}T_2}=\frac{X_1+\mu X_2}{T_1+\mu T_2},\quad \mu=\frac{T_1}{T_2}\lambda,\quad \frac{Y_1+\mu Y_2}{T_1+\mu T_2},\quad \frac{Z_1+\mu Z_2}{T_1+\mu T_2}.$$

Deci, coordonatele omogene ale unui punct M al dreptei M_1M_2 sunt

$$X_1+\mu X_2,\ Y_1+\mu Y_2,\ Z_1+\mu Z_2,\ T_1+\mu T_2.$$

Punctele $\quad X_1+\mu X_2,\ldots T_1+\mu T_2,\quad \mu=\lambda\frac{T_1}{T_2},$

$$X_1+\mu' X_2,\ldots T_1+\mu' T_2,\quad \mu'=\lambda'\frac{T_1}{T_2}$$

sunt conjugate armonic în raport cu M_1 și M_2 când $\lambda+\lambda'=0$, sau $\mu+\mu'=0$.

Odată cu introducerea coordonatelor omogene, se poate lucra cu punctele de la infinit întocmai ca și cu punctele de la distanță finită; două drepte din același plan au totdeauna un punct de intersecție (la distanță finită sau la infinit), două plane au totdeauna o dreaptă comună. Mai mult, să presupunem că, pentru o figură, care are toate punctele sale la distanță finită, există o proprietate, care se exprimă analitic cu relațiunea

$$F(X_1, Y_1, Z_1, T_1; \ldots X_n, Y_n, Z_n, T_n)=0, \tag{2}$$

între coordonatele (X_i, Y_i, Z_i, T_i), $i=1,2,\ldots n$, ale punctelor sale. Dar se poate întâmpla ca ecuația (2) să fie verificată și când una din coordonatele T_i este nulă, astfel că proprietatea geometrică ce a avut loc pentru figura considerată când toate punctele sale sunt la distanță finită, continuă să fie adevărată pentru aceeași figură și când unul din punctele sale este aruncat la infinit.

2. ELEMENTE IMAGINARE. Considerând în planul xOy cercul $x^2+y^2=1$ și dreapta $y=2$, punctele lor de intersecție au pentru coordonate rădăcinile acestor ecuații care sunt $x=\pm i\sqrt{3}$, $y=2$. Cum dreapta este exterioară cercului și deci nu-l taie în puncte reale, se vede că punctelor de intersecție ale cercului cu dreapta, care de fapt nu există, le corespund coordonate imaginare. Punctele $(a+ia', b+ib', c+ic')$, $(a-ia', b-ib', c-ic')$ se zic imaginar conjugate.

Prin analogie, o curbă sau o suprafață, ale căror ecuații conțin cantități complexe, se zic curbe sau suprafețe imaginare.

Să considerăm punctele $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, astfel că

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=0,$$

adică parametrii directori

$$a=x_1-x_2,\quad b=y_1-y_2,\quad c=z_1-z_2$$

ai dreptei M_1M_2 verifică relația $a^2+b^2+c^2=0$. Dreapta M_1M_2 se zice izotropă și se vede că distanța $M'M''$ a două puncte oarecare $M'\left(\frac{x_1+\lambda' x_2}{1+\lambda'},\ldots\right)$, $M''\left(\frac{x_1+\lambda'' x_2}{1+\lambda''},\ldots\right)$ ale acestei drepte M_1M_2 este nulă.

În plan, parametrii directori ai unei drepte izotrope verifică relația

$a^2+b^2=0$, de unde $\frac{b^2}{a^2}+1=0$, $\frac{b}{a}=\pm i$, şi deci coeficientul unghiular al unei drepte izotrope din plan este $\pm i$, iar ecuaţia dreptelor izotrope ce trec printr-un punct (x_0, y_0) este

$$y-y_0=\pm i(x-x_0).$$

Făcând această ecuaţie omogenă, avem

$$y-y_0z=\pm i(x-x_0z),$$

iar coordonatele punctelor de la infinit ale acestor drepte izotrope verifică relaţiile $y=\pm ix$, $z=0$,

sau $x^2+y^2=0$, $z=0$,

care se mai pot scrie

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{i}=\frac{z}{0}, \quad \frac{x}{1}=\frac{y}{-i}=\frac{z}{0}.$$

Punctele ale căror coordonate omogene sunt $I(1, i, 0)$, $J(1, -i, 0)$ sunt comune tuturor dreptelor izotrope din plan.

Făcând ecuaţia unui cerc omogenă, se obţine

$$x^2+y^2-2axz-2byz+cz^2=0,$$

iar coordonatele punctelor de intersecţie ale acestui cerc cu dreapta de la infinit verifică ecuaţiile

$$x^2+y^2=0, \quad z=0,$$

adică sunt punctele I şi J. Deci, toate cercurile din plan trec prin punctele I şi J, care se zic pentru acest motiv punctele circulare (ciclice) ale planului.

Se vede că o dreaptă izotropă,

$$y-y_0=i(x-x_0),$$

este perpendiculară pe ea însăşi, căci $i\cdot i+1=0$.

Ecuaţiile dreptei ce uneşte punctele imaginar conjugate $(a'+ia'', b'+ib'', c'+ic'')$, $(a'-ia'', b'-ib'', c'-ic'')$, sunt

$$\frac{x-a'-ia''}{a'+ia''-(a'-ia'')}=\frac{y-b'-ib''}{b'+ib''-(b'-ib'')}=\frac{z-c'-ic''}{c'+ic''-(c'-ic'')},$$

sau

$$\frac{x-a'-ia''}{a''}=\frac{y-b'-ib''}{b''}=\frac{z-c'-ic''}{c''},$$

care se mai pot scrie egalând primele două rapoarte cu al treilea,

$$\frac{x-a'-ia''}{a''}=\frac{z-c'-ic''}{c''}, \quad \frac{y-b'-ib''}{b''}=\frac{z-c'-ic''}{c''},$$

sau

$$\frac{x-a'}{a''}=\frac{z-c'}{c''}, \quad \frac{y-b'}{b''}=\frac{z-c'}{c''},$$

$$\frac{x-a'}{a''}=\frac{y-b'}{b''}=\frac{z-c'}{c''}.$$

Deci, dreapta care uneşte două puncte imaginar conjugate este reală.

Ecuaţia unei drepte imaginare din plan fiind

$$(A+iA')x+(B+iB')y+C+iC'=0,$$

se vede că această dreaptă trece prin punctul real de intersecţie al dreptelor $Ax+By+C=0$, $A'x+B'y+C'=0$.

În mod analog se vede că un plan imaginar

$$(A+iA')x+(B+iB')y+(C+iC')z+D+iD'=0,$$

trece prin dreapta reală, intersecția planelor

$$Ax+By+Cz+D=0,\quad A'x+B'y+C'z+D'=0.$$

În ce privește dreptele imaginare din spațiu, trebue făcută oarecare distincție. Unele, ale căror ecuații sunt

$$P+iQ=0,\quad R+iS=0, \tag{3}$$

unde P, Q, R, S sunt funcțiuni lineare reale, linear independente, n'au nici un punct real, căci în caz contrar coordonatele x, y, z ale acestui punct ar verifica de o dată patru ecuații lineare $P=0, Q=0, R=0, S=0$. Aceste drepte nu sunt în nici un plan real. Pentruca ele să fie într'un plan real, ar trebui ca în ecuația

$$(\alpha+i\beta)(P+iQ)+(\gamma+i\delta)(R+iS)=0,$$

care reprezintă un plan ce trece prin dreapta dată, să se poată anula coeficientul lui i, ceea ce ar fi contra ipotezei, căci ar stabili o relație lineară între cele patru funcțiuni P, Q, R, S.

Urmând aceeaș cale, se arată că dacă pe o dreaptă imaginară din spațiu este un punct real, atunci acea dreaptă este situată într'un plan real și aceasta are loc când între cantitățile P, Q, R, S, ce intră în ecuațiile dreptei, există o relație lineară.

Acestea fiind stabilite, să presupunem că pentru o figură, ale cărei toate punctele sunt reale, există o proprietate, exprimată analitic cu o relație $F=0$, între coordonatele punctelor acestei figuri. Dar, se poate ca relația $F=0$, care are loc pentru valori reale ale coordonatelor, să fie verificată și pentru oarecare valori imaginare ale acestor coordonate, astfel că proprietatea geometrică ce a avut loc pentru figura considerată, când toate punctele sale sunt reale, continuă să fie adevărată pentru aceeaș figură și când unele din punctele sale devin imaginare. Acesta este principiul continuității, introdus în Geometrie de marele geometru francez Poncelet (1822).

COORDONATE TETRAEDRICE.

3. GENERALITĂȚI. Să considerăm patru funcțiuni X, Y, Z, T de coordonatele carteziene omogene x, y, z, t, ale unui punct,

$$\begin{aligned} X&=a_1x+b_1y+c_1z+d_1t,\\ Y&=a_2x+b_2y+c_2z+d_2t,\\ Z&=a_3x+b_3y+c_3z+d_3t,\\ T&=a_4x+b_4y+c_4z+d_4t, \end{aligned} \tag{4}$$

pe care să le presupunem linear independente. Dacă se cunosc valorile expresiunilor X, Y, Z, T, pentru un punct $M(x, y, z, t)$, formulele precedente ne dau valori pentru coordonatele omogene x, y, z, t, ale punctului M,

$$(5)\qquad \begin{aligned} x &= A_1X + B_1Y + C_1Z + D_1T,\\ y &= A_2X + B_2Y + C_2Z + D_2T,\\ z &= A_3X + B_3Y + C_3Z + D_3T,\\ t &= A_4X + B_4Y + C_4Z + D_4T. \end{aligned}$$

Se pot considera deci X, Y, Z, T ca un sistem de coordonate omogene proprii pentru a determina un punct în spațiu.

Funcțiunile X, Y, Z, T fiind liniar independente, ecuațiile $X \equiv a_1x+b_1y+c_1z+d_1t=0$, $Y \equiv a_2x+b_2y+c_2z+d_2t=0$, $Z \equiv a_3x+b_3y+c_3z+d_3t=0$, $T \equiv a_4x+\dots=0$ reprezintă patru plane, neavând toate nici un punct comun, care formează deci un tetraedru. Acest tetraedru, care se zice tetraedru de referință, poate avea unul, două, sau trei vârfuri la infinit. Cantitățile X, Y, Z, T, corespunzătoare unui punct M, se zic coordonatele tetraedrice ale punctului M și sunt funcțiuni liniare de coordonatele omogene x, y, z, t ale punctului M. Cum x, y, z, t sunt cunoscute afară de un factor constant, coordonatele tetraedrice X, Y, Z, T sunt cunoscute afară de un factor constant. De ex., dacă tetraedrul de referință este format de planele de coordonate yOz, zOx, xOy și planul de la infinit, ecuațiile acestor fețe sunt respectiv $x=0$, $y=0$, $z=0$, $t=0$; cum, în membrii al doilea ai ecuațiilor (4) sunt primele membre ale ecuațiilor acestor plane, formulele (4) devin $X=x$, $Y=y$, $Z=z$, $T=t$, unde x, y, z, t sunt coordonatele carteziene omogene ale punctului considerat. După cum se vede, sistemul de coordonate carteziene este un caz foarte particular al sistemului de coordonate tetraedrice, când tetraedrul de referință are trei din vârfurile sale aruncate la infinit.

Din expresiunile (4), se vede că X, Y, Z, T, coordonatele tetraedrice ale unui punct M, sunt proporționale respectiv cu distanțele punctului M la fețele tetraedrului de referință.

Cunoașterea tetraedrului de referință nu este suficientă pentru definirea coordonatelor tetraedrice. În adevăr, din relațiile (4) se vede că fiind dat tetraedrul de referință, adică ecuațiile fețelor sale, $a_1x+b_1y+c_1z+d_1t=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2t=0$, $a_3x+b_3y+c_3z+d_3t=0$, $a_4x+b_4y+c_4z+d_4t=0$, coordonatele tetraedrice pot fi X, Y, Z, T, sau aX, bY, cZ, dT, a, b, c, d fiind factori constanți, căci, dacă ecuațiile fețelor tetraedrului de referință sunt $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, $T=0$, aceste fețe pot avea și ecuațiile $aX=0$, $bY=0$, $cZ=0$, $dT=0$, de oarece a, b, c, d sunt diferiți de zero. Deci, dacă un sistem de coordonate tetraedrice sunt X, Y, Z, T, atunci luând sistemul de coordonate tetraedrice aX, bY, cZ, dT, a, b, c, d fiind constante, tetraedrul de referință rămâne același.

Observând relațiile (5), se vede că (A_1, A_2, A_3, A_4) sunt coordonatele omogene ale vârfului $Y=Z=T=0$ al tetraedrului de referință; de asemenea, (B_1, B_2, B_3, B_4), (C_1, C_2, C_3, C_4), (D_1, D_2, D_3, D_4) sunt coordonatele omogene respectiv ale vârfurilor tetraedrului de referință $X=Z=T=0$,

$X=Y=T=0$, $X=Y=Z=0$.

Presupunând că toate aceste vârfuri sunt la distanță finită și punând

$$(6)\qquad A_4X=\alpha,\quad B_4Y=\beta,\quad C_4Z=\gamma,\quad D_4T=\delta,$$

$$(7)\quad \begin{cases} \frac{A_1}{A_4}=x_1, & \frac{B_1}{B_4}=x_2, & \frac{C_1}{C_4}=x_3, & \frac{D_1}{D_4}=x_4, \\ \frac{A_2}{A_4}=y_1, & \frac{B_2}{B_4}=y_2, & \frac{C_2}{C_4}=y_3, & \frac{D_2}{D_4}=y_4, \\ \frac{A_3}{A_4}=z_1, & \frac{B_3}{B_4}=z_2, & \frac{C_3}{C_4}=z_3, & \frac{D_3}{D_4}=z_4, \end{cases}$$

formulele (5) devin

$$(8)\quad \begin{aligned} \frac{x}{t}&=\frac{\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3+\delta x_4}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}, \\ \frac{y}{t}&=\frac{\alpha y_1+\beta y_2+\gamma y_3+\delta y_4}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}, \\ \frac{z}{t}&=\frac{\alpha z_1+\beta z_2+\gamma z_3+\delta z_4}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}. \end{aligned}$$

Aceste expresiuni definesc coordonatele carteziene ale centrului de greutate a patru mase $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, așezate respectiv în vârfurile (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4) ale tetraedrului de referință. Deci, punctul de coordonate tetraedrice (X, Y, Z, T) este centrul de greutate a patru mase A_4X, B_4Y, C_4Z, D_4T, așezate respectiv în vârfurile tetraedrului de referință.

Făcând în formulele (6) $A_4=B_4=C_4=D_4$, coordonatele tetraedrice X, Y, Z, T devin coordonatele $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, numite și <u>coordonatele baricentrice</u> ale lui Möbius (1827).

Ecuația planului de la infinit în coordonate tetraedrice este $t=0$, adică

$$A_4X+B_4Y+C_4Z+D_4T=0.$$

O ecuație omogenă și de gradul m în raport cu coordonatele omogene carteziene x, y, z, t reprezentând o suprafață de ordinul m, să înlocuim pe (x, y, z, t) cu valorile lor (5) în funcție de coordonatele tetraedrice X, Y, Z, T. Se obține o ecuație omogenă și de gradul m în raport cu X, Y, Z, T, care reprezintă deci o suprafață de ordinul m în coordonate tetraedrice.

4. RAPORTUL ANARMONIC A PATRU PUNCTE ALE UNEI DREPTE. Însemnând cu (x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2), (X_1, Y_1, Z_1, T_1), (X_2, Y_2, Z_2, T_2) coordonatele omogene carteziene și tetraedrice a două puncte A și B, coordonatele omogene ale unui punct $M(x, y, z, t)$ al dreptei AB sunt

$$x=x_1+\lambda x_2,\quad y=y_1+\lambda y_2,\quad z=z_1+\lambda z_2,\quad t=t_1+\lambda t_2,\quad \lambda=\frac{AM}{MB}\frac{t_1}{t_2}.$$

Din formulele (4) deducem

$$X=a_1(x_1+\lambda x_2)+b_1(y_1+\lambda y_2)+c_1(z_1+\lambda z_2)+d_1(t_1+\lambda t_2),$$

. . . . . .

sau $$X=a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1+d_1t_1+\lambda(a_1x_2+b_1y_2+c_1z_2+d_1t_2),$$

. . . . . .

și notând cu

$$X_1 = a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 + d_1t_1, \ldots,$$
$$X_2 = a_1x_2 + b_1y_2 + c_1z_2 + d_1t_2, \ldots$$

coordonatele tetraedrice ale punctelor A și B, urmează că

$$X_1 + \lambda X_2,\ Y_1 + \lambda Y_2,\ Z_1 + \lambda Z_2,\ T_1 + \lambda T_2$$

sunt coordonatele tetraedrice ale unui punct oarecare al dreptei AB.

Considerând două puncte M' și M'' de coordonate tetraedrice

$$X_1 + \lambda' X_2,\ Y_1 + \lambda' Y_2,\ Z_1 + \lambda' Z_2,\ T_1 + \lambda' T_2,\quad \lambda' = \frac{AM'}{M'B}\frac{t_1}{t_2},$$
$$X_1 + \lambda'' X_2,\ Y_1 + \lambda'' Y_2,\ Z_1 + \lambda'' Z_2,\ T_1 + \lambda'' T_2,\quad \lambda'' = \frac{AM''}{M''B}\frac{t_1}{t_2},$$

raportul anarmonic al punctelor A, B, M', M'' este

$$R(A, B, M', M'') = \frac{M'A}{M'B} : \frac{M''A}{M''B} = \frac{\lambda'}{\lambda''}.$$

Deci, punctele M', M'' sunt conjugate armonic în raport cu A și B, când $R(A, B, M', M'') = -1$, adică $\lambda' + \lambda'' = 0$.

Să considerăm acum patru puncte coliniare M_i, ale căror coordonate tetraedrice sunt

$$X_i = X' + \lambda_i X'',\ Y_i = Y' + \lambda_i Y'',\ Z_i = Z' + \lambda_i Z'',\ T_i = T' + \lambda_i T'',\ i = 1, 2, 3, 4.$$

Avem, de ex., $X_1 = X' + \lambda_1 X'',\ X_2 = X' + \lambda_2 X'',\ X_3 = X' + \lambda_3 X'',\ X_4 = X' + \lambda_4 X''$.

Eliminând între primele trei pe X', X'', urmează

$$\begin{vmatrix} X_1 & 1 & \lambda_1 \\ X_2 & 1 & \lambda_2 \\ X_3 & 1 & \lambda_3 \end{vmatrix} = 0,$$

de unde

$$X_3 = \frac{X_1(\lambda_3 - \lambda_2) - X_2(\lambda_3 - \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

De asemenea

$$X_4 = \frac{X_1(\lambda_4 - \lambda_2) - X_2(\lambda_4 - \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Putem deci scrie coordonatele punctelor M_i, $i = 1, 2, 3, 4$,

(M_1) $X_1,\ Y_1,\ Z_1,\ T_1,$

(M_2) $X_2,\ Y_2,\ Z_2,\ T_2,$

(M_3) $X_1 - \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2}X_2,\ Y_1 - \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2}Y_2,\ Z_1 - \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2}Z_2,\ T_1 - \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2}T_2,$

(M_4) $X_1 - \frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_2}X_2,\ Y_1 - \frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_2}Y_2,\ Z_1 - \frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_2}Z_2,\ T_1 - \frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_2}T_2.$

Deci, raportul anarmonic al punctelor M_1, M_2, M_3, M_4 este

$$R(M_1, M_2, M_3, M_4) = \left(-\frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2}\right) : \left(-\frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_2}\right),$$

$$R(M_1, M_2, M_3, M_4) = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} : \frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_2}.$$

5. RAPORTUL ANARMONIC AL UNUI FASCICOL DE PATRU PLANE. Să considerăm patru plane $P + \lambda_i Q = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, ce trec prin dreapta $P = 0, Q = 0$ și fie $X' + \mu X'',\ Y' + \mu Y'',\ Z' + \mu Z'',\ T' + \mu T''$ coordonatele unui punct al dreptei ce trece prin punctele (X', Y', Z', T'), (X'', Y'', Z'', T''). Însemnând cu P', Q', P'', Q'' rezultatele substituirilor în P și Q ale coordonatelor (X', Y', Z', T'), (X'', Y'', Z'', T''), coordonatele punctelor M_1, M_2, M_3, M_4 de intersecție ale acestor plane cu dreapta considerată sunt

$X'+\mu_i X'', Y'+\mu_i Y'', Z'+\mu_i Z'', T'+\mu_i T'', \quad i=1,2,3,4,$

unde $$\mu_i = -\frac{P'+\lambda_i Q'}{P''+\lambda_i Q''}, \quad i=1,2,3,4.$$

Raportul anarmonic al punctelor M_1, M_2, M_3, M_4 este

$$\frac{\mu_3-\mu_1}{\mu_3-\mu_2} : \frac{\mu_4-\mu_1}{\mu_4-\mu_2} = \frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3-\lambda_2} : \frac{\lambda_4-\lambda_1}{\lambda_4-\lambda_2} = \text{const.}$$

Deci, cu orice secantă vom tăia cele patru plane ale fasciculului considerat, raportul anarmonic al punctelor de intersecție este constant și egal cu

$$\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3-\lambda_2} : \frac{\lambda_4-\lambda_1}{\lambda_4-\lambda_2},$$

și se numește raportul anarmonic al celor patru plane $P+\lambda_i Q=0$, $i=1,2,3,4$. Se vede că planele $P=0$, $Q=0$, $P+\lambda Q=0$, $P-\lambda Q=0$ formează un fascicol armonic.

6. ECUAȚIA UNEI CUADRICE CONJUGATĂ ÎN RAPORT CU TETRAEDRUL DE REFERINȚĂ. Să considerăm o cuadrică

$$f(X,Y,Z,T) = AX^2+A'Y^2+A''Z^2+A'''T^2+2BYZ+2B'ZX+2B''XY+$$
$$2CXT+2C'YT+2C''ZT=0$$

și punctul $M_1(X_1,Y_1,Z_1,T_1)$. Dacă $M(X,Y,Z,T)$ este un punct al spațiului, un punct al dreptei M_1M are coordonate de forma

$$X_1+\lambda X, \quad Y_1+\lambda Y, \quad Z_1+\lambda Z, \quad T_1+\lambda T.$$

Valorile lui λ corespunzătoare punctelor M' și M'' de intersecție ale acestei drepte cu cuadrica sunt date de ecuația

$$f(X_1+\lambda X, \dots T_1+\lambda T) = \lambda^2 f(X,Y,Z,T)+\lambda\left(X\frac{\partial f}{\partial X_1}+Y\frac{\partial f}{\partial Y_1}+Z\frac{\partial f}{\partial Z_1}+T\frac{\partial f}{\partial T_1}\right)$$
$$+f(X_1,Y_1,Z_1,T_1)=0.$$

Pentru ca punctele M și M_1 să fie conjugate armonic în raport cu M' și M'', urmează că rădăcinile λ' și λ'' ale acestei ecuații să verifice relația $\lambda'+\lambda''=0$, adică

$$X\frac{\partial f}{\partial X_1}+Y\frac{\partial f}{\partial Y_1}+Z\frac{\partial f}{\partial Z_1}+T\frac{\partial f}{\partial T_1}=0.$$

Deci, locul punctelor M, conjugate armonic cu M_1 în raport cu punctele de intersecție ale cuadricei cu o dreaptă variabilă ce trece prin $M_1(X_1,Y_1,Z_1,T_1)$ este un plan

$$X\frac{\partial f}{\partial X_1}+Y\frac{\partial f}{\partial Y_1}+Z\frac{\partial f}{\partial Z_1}+T\frac{\partial f}{\partial T_1}=0$$

sau

$$X_1\frac{\partial f}{\partial X}+Y_1\frac{\partial f}{\partial Y}+Z_1\frac{\partial f}{\partial Z}+T_1\frac{\partial f}{\partial T}=0,$$

care este planul polar al punctului M_1 în raport cu cuadrica.

Vârful $Y_1=Z_1=T_1=0$ al tetraedrului de referință are ca plan polar

$$X_1\frac{\partial f}{\partial X}=0, \quad AX+B''Y+B'Z+CT=0.$$

Pentru ca acest plan să fie tocmai fața opusă vârfului considerat, adică planul a cărui ecuație este $X=0$, urmează $B''=B'=C=0$. Scriind că fiecare vârf este polul feței opuse a tetraedrului de referință, urmează $B=C'=C''=0$. Deci, cuadrica, ce se bucură de proprietatea că fiecare vârf

al tetraedrului de referință este polul feței opuse, adică, cuadrica ce este conjugată cu tetraedrul de referință, are o ecuație de forma

$$AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + A'''T^2 = 0.$$

Dar tetraedrul de referință nu se schimbă dacă înlocuim X cu pX, Y cu qY, Z cu rZ, T cu sT. Se înlocuiesc deci coordonatele tetraedrice cu altele care se raportează la același tetraedru de referință, astfel că ecuația cuadricei raportată la tetraedrul de referință,

$$AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + A'''T^2 = 0,$$

devine $$p^2AX^2 + q^2A'Y^2 + r^2A''Z^2 + s^2A'''T^2 = 0.$$

Dacă alegem pe p, q, r, s, astfel ca p^2A, q^2A', r^2A'', s^2A''' să fie egale cu 1 în valoare absolută, ecuația cuadricei conjugată cu tetraedrul de referință devine $\lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2 + \varepsilon T^2 = 0$,
coeficienții $\lambda, \mu, \nu, \varepsilon$ având modulele egale cu unitatea.

NOȚIUNI ASUPRA OMOLOGIEI.

7. Să considerăm transformarea omografică particulară

(9) $$X = X',\ Y = Y',\ Z = Z',\ T = aX' + bY' + cZ' + dT',$$

unde (X, Y, Z, T), (X', Y', Z', T') sunt coordonatele tetraedrice a două puncte M și M' corespunzătoare. Punctele duble ale acestei transformări, adică acelea care coincid cu omoloagele lor, se obțin făcând

$$X' = \rho X,\ Y' = \rho Y,\ Z' = \rho Z,\ T' = \rho T,$$

de unde se obțin ecuațiile

$$X(1-\rho) = 0,\ Y(1-\rho) = 0,\ Z(1-\rho) = 0,\ T(1-d\rho) = \rho(aX + bY + cZ).$$

Putem avea două soluții; sau $\rho = 1$, când X, Y, Z, T trebue să verifice condiția

(10) $$aX + bY + cZ + (d-1)T = 0,$$

iar toate punctele situate în acest plan coincid cu omoloagele lor. Altă soluție se obține, presupunând $\rho \neq 1$, când avem

(11) $$X = 0,\ Y = 0,\ Z = 0,\ \rho = \frac{1}{d},$$

care dă vârful tetraedrului opus la fața $T = 0$.

Transformarea (9) este ceea ce Poncelet numia omologie. Planul (II) reprezentat de ecuația (10) se zice planul de omologie, iar punctul O definit de ecuațiile (11) se zice centru de omologie. Centrul și planul de omologie rămân neschimbate în această transformare. Orice dreaptă ce trece prin centrul de omologie se corespunde ei însăși.

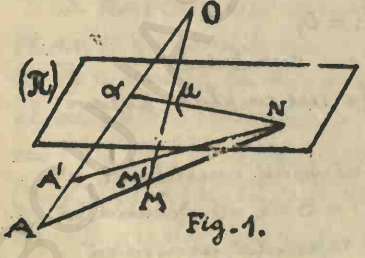

Fig. 1.

Omologia este definită când se dau centrul, planul de omologie și o pereche de puncte omoloage. Într-adevăr, fie O centrul, (II) planul de omologie (Fig. 1), A și A' o pereche de puncte omoloage. Pentru a găsi omologul M' al punctului M, să observăm că dreapta AM are două puncte cărora li se cunosc omoloagele lor, punctul A și punctul N de intersecție al

dreptei AM cu planul (Π), care este propriul său omolog. Deci omologul M' al punctului M este intersecția dreptelor OM și $A'N$.

Însemnând cu α și μ punctele de intersecție al planului (Π) cu OA și OM, tăind fascicolul $(N.O\alpha A'A)$ cu secantele OA și OM, avem

$$(O\alpha A'A) = (O\mu M'M)$$

și deci, în omologia cu centrul O și planul de omologie (Π), între două puncte omoloage M și M', avem relația

$$\frac{M'O}{MO} : \frac{M'\mu}{M\mu} = \frac{A'O}{AO} : \frac{A'\alpha}{A\alpha} = K = \text{const.}, \tag{12}$$

K zicându-se constanta de omologie.

8. În plan, avem axă de omologie în locul planului de omologie. În plan, pornind cu definiția exprimată de relația (12), se vede că două drepte omoloage $AM, A'M'$ se taie pe axa de omologie; dreapta ce unește două puncte omoloage trece prin centrul de omologie; fiind date două triunghiuri $ABC, A'B'C'$, cu vârfurile lor pe trei drepte concurente în O, laturile omoloage, $(AB, A'B')$, $(BC, B'C')$, $(CA, C'A')$ se taie în trei puncte colineare pe axa de omologie și reciproc, fiind date două triunghiuri ale căror laturi omoloage se taie în trei puncte colineare pe axa de omologie, dreptele ce unesc vârfurile omoloage ale acestor triunghiuri sunt concurente în centrul de omologie; în aceste cazuri, triunghiurile se zic omologice.

În spațiu, figura omologică a unei drepte este o altă dreaptă care se taie cu prima într'un punct al planului de omologie; figura omologică a unui plan este alt plan, a cărui dreaptă de intersecție este în planul de omologie; la fel se pot concepe tetraedre omologice, analog cu triunghiuri omologice.

Când planul de omologie este aruncat la infinit, relația (12) devine

$$\frac{M'O}{MO} = K,$$

iar omologia se reduce la o omotetie.

9. Formulele de transformare ale omologii în cazul coordonatelor omogene carteziene se obțin în modul următor. Să luăm ca origină centrul de omologie O; ca axă Ox o dreaptă oarecare ce taie planul de omologie în A, ca axe Oy, Oz, drepte paralele cu planul de omologie. Fie (x, y, z), (x', y', z') coordonatele carteziene a două puncte corespunzătoare M și M'. Avem

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}. \tag{13}$$

Însemnând cu μ punctul unde OM taie planul de omologie, avem

$$\frac{OM'}{OM} : \frac{\mu M'}{\mu M} = K,$$

K fiind constanta de omologie.

Raportul anarmonic a patru puncte O, μ, M, M' este egal cu acela al celor patru proecții pe Ox, făcute paralel cu planul de omologie. Aceste proecții fiind O, A, m, m', avem

$$\frac{Om'}{Om} : \frac{Am'}{Am} = K,$$

și punând $OA=a$, urmează

$$\frac{x'}{x}:\frac{x'-a}{x-a}=K,\quad x=\frac{ax'}{aK+(1-K)x'},$$

și ținând seamă de relațiile (13), obținem formulele de transformare

$$x=\frac{ax'}{aK+(1-K)x'},\quad y=\frac{ay'}{aK+(1-K)x'},\quad z=\frac{az'}{aK+(1-K)x'}.$$

Însemnând cu (x,y,z,t), (x',y',z',t') coordonatele carteziene omogene ale punctelor M și M', formulele de transformare devin

(14) $\rho x=ax'$, $\rho y=ay'$, $\rho z=az'$, $\rho t=aKt'+(1-K)x'$,

ρ fiind un factor de proporționalitate.

Ecuația unei sfere fiind

$$(x-x_0t)^2+(y-y_0t)^2+(z-z_0t)^2-r^2t^2=0,$$

făcând transformarea (14), se vede că figura omologică a unei sfere are ecuația

(15) $$P^2+Q^2+R^2-S^2=0,$$

P, Q, R, S fiind polinoame lineare și omogene.

Dacă omologia este reală, adică, dacă centrul, planul și constanta de omologie sunt reale, P,Q,R,S sunt polinoame cu coeficienți reali și se vede că trei din cele patru pătrate au un semn oarecare, al patrulea un semn contrar.

Se vede, de asemenea, că figura omologică a unei sfere imaginare are o ecuație de forma

(16) $$P^2+Q^2+R^2+S^2=0,$$

cele patru pătrate având același semn.

Să considerăm acum o ecuație de forma

(17) $$P^2-Q^2+R^2-S^2=0,$$

care se poate scrie

$$(P+Q)(P-Q)=(S+R)(S-R).$$

Se vede că această suprafață de ordinul al doilea este riglată, conține dreapta reală

$$P+Q=0,\quad R+S=0,$$

și cum sfera nu conține generatoare reale, această suprafață nu poate fi figura omologică a unei sfere într'o omologie reală.

Considerând tetraedrul $(\mathcal{T})$ ale cărui fețe sunt $P=0, Q=0, R=0, S=0$, se vede că trecând la coordonate tetraedrice $X=P$, $Y=Q$, $Z=R$, $T=S$, ecuațiile (15), (16), (17) au formele

$$\lambda X^2+\mu Y^2+\nu Z^2+\varepsilon T^2=0,$$

$\lambda,\mu,\nu,\varepsilon$ fiind egali cu 1 în valoare absolută, iar suprafața de ordinul al doilea considerată, care este figura omologică a unei sfere, este conjugată în raport cu tetraedrul $(\mathcal{T})$.

FIGURI CORELATIVE.

10. COORDONATE TANGENȚIALE. Fiind dată ecuația punctuală a unei conice,

(1) $$f(x,y,z) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0,$$

să exprimăm că dreapta

(2) $$ux + vy + wz = 0$$

este tangentă la această conică.

Trebue să existe un punct (x_1, y_1, z_1) pe conica (1), unde tangenta

$$x\frac{\partial f}{\partial x_1} + y\frac{\partial f}{\partial y_1} + z\frac{\partial f}{\partial z_1} = 0$$

trebue să se confunde cu dreapta (2). De unde

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{u} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y_1}}{v} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{w} = 2\lambda,$$

(3) $$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Dz_1 - \lambda u = 0, \\ Bx_1 + Cy_1 + Ez_1 - \lambda v = 0, \\ Dx_1 + Ey_1 + Fz_1 - \lambda w = 0. \end{cases}$$

Scriind că punctul (x_1, y_1, z_1) este pe dreapta (2), urmează

(4) $$ux_1 + vy_1 + wz_1 = 0.$$

Eliminând pe x_1, y_1, z_1 între ecuațiile (3) și (4), avem

(5) $$\begin{vmatrix} A & B & D & u \\ B & C & E & v \\ D & E & F & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

sau

(6) $$Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Duw + 2Evw + Fw^2 = 0,$$

unde $A, B, C, \ldots F$ sunt minorii corespunzători elementelor $A, \ldots F$, din determinantul

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0.$$

Ecuația (5) sau (6) exprimă condiția că dreapta $ux + vy + wz = 0$ este tangentă la conica (1) și se numește ecuația tangențială a acestei conice. Cantitățile u, v, w, care caracterizează dreapta, se zic coordonatele tangențiale ale dreptei.

O ecuație liniară $$au + bv + cw = 0,$$ care exprimă că dreapta $ux + vy + wz = 0$ trece prin punctul de coordonate omogene (a, b, c), reprezintă deci un punct, este deci ecuația tangențială a punctului. O ecuație omogenă și de ordinul al doilea în raport cu u, v, w reprezintă o conică. Ecuația (5) arată cum se poate obține ecuația tangențială a unei conice când se cunoaște ecuația ei punctuală (1).

Ecuația $(u' + \lambda u'')x + (v' + \lambda v'')y + (w' + \lambda w'')z = 0$ reprezentând o dreaptă ce trece prin intersecția dreptelor $u'x + v'y + w'z = 0$, $u''x + v''y + w''z = 0$, urmează

că $u'+\lambda u'',\ v'+\lambda v'',\ w'+\lambda w''$
sunt coordonatele tangențiale ale unei drepte ce trece prin intersecția dreptelor ale căror coordonate tangențiale sunt (u',v',w'), (u'',v'',w'').

În mod analog se vede că

$$ux+vy+wz+\rho t=0$$

fiind ecuația unui plan, u,v,w,ρ sunt coordonatele tangențiale ale planului. Paralelismul între coordonatele tangențiale și punctuale, ne permite a enunța următoarele rezultate. Ecuația

$$au+bv+cw+d\rho=0$$

reprezintă un punct, ale cărui coordonate omogene sunt (a,b,c,d). Ecuațiile

$$au+bv+cw+d\rho=0,\quad a'u+b'v+c'w+d'\rho=0$$

reprezintă planele ce trec prin două puncte, adică dreapta ce trece prin punctele (a,b,c,d), (a',b',c',d'). Trei ecuații de gradul întâi definesc planul ce trece cele trei puncte.

Dacă (u,v,w,ρ), (u',v',w',ρ') sunt coordonatele tangențiale a două plane, (P) și (P'), atunci

$$u+\lambda u',\ v+\lambda v',\ w+\lambda w',\ \rho+\lambda\rho'$$

sunt coordonatele tangențiale ale unui plan ce trece prin intersecția planelor (P) și (P') și raportul anarmonic al planelor $u+\lambda_i u',\ldots\ \rho+\lambda_i\rho',\ i=1,2,3,4$, este egal cu acela al celor patru valori $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ ale lui λ.

Dacă (u,v,w,ρ), (u',v',w',ρ'), (u'',v'',w'',ρ'') sunt coordonatele tangențiale a trei plane (P), (P'), (P''), netrecând prin aceeași dreaptă, atunci

$$\lambda u+\lambda' u'+\lambda'' u'',\ \lambda v+\lambda' v'+\lambda'' v'',\ \lambda w+\lambda' w'+\lambda'' w'',\ \lambda\rho+\lambda'\rho'+\lambda''\rho''$$

sunt coordonatele a unui plan oarecare ce trece prin intersecția planelor (P), (P'), (P''), după cum

$$\lambda x+\lambda' x'+\lambda'' x'',\ \lambda y+\lambda' y'+\lambda'' y'',\ \lambda z+\lambda' z'+\lambda'' z'',\ \lambda t+\lambda' t'+\lambda'' t''$$

sunt coordonatele unui punct din planul format de punctele (x,y,z,t), (x',y',z',t'), (x'',y'',z'',t'').

Dacă (u_i,v_i,w_i,ρ_i), $i=1,2,3,4$, sunt coordonatele tangențiale a patru plane P_i, $i=1,2,3,4$, care n'au un punct comun, atunci

$$\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\lambda_3 u_3+\lambda_4 u_4,\ldots,\ \lambda_1\rho_1+\lambda_2\rho_2+\lambda_3\rho_3+\lambda_4\rho_4$$

sunt coordonatele tangențiale ale unui plan oarecare al spațiului, după cum

$$\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_3 x_3+\lambda_4 x_4,\ldots\quad \lambda_1 t_1+\lambda_2 t_2+\lambda_3 t_3+\lambda_4 t_4$$

sunt coordonatele punctuale ale unui punct al spațiului în care se dau punctele (x_i,y_i,z_i,t_i), $i=1,2,3,4$.

În mod analog ca la plan, se vede că o ecuație de gradul al doilea și omogenă, $\varphi(u,v,w,\rho)=0$ reprezintă o cuadrică, ale cărei plane tangente au coordonatele tangențiale (u,v,w,ρ).

Dacă (u_1,v_1,w_1,ρ_1), (u,v,w,ρ) sunt coordonatele tangențiale a două plane, atunci

$$\varphi(u_1+\lambda u,v_1+\lambda v,w_1+\lambda w,\rho_1+\lambda\rho)=0 \tag{7}$$

este ecuația care dă valorile lui λ corespunzătoare celor două plane tan-

gente ce se pot duce la cuadrica $\varphi(u,v,w,p)=0$ prin dreapta de intersecție a celor două plane (u_1,v_1,w_1,p_1), (u,v,w,p).

Dezvoltând ecuația (7), avem

$$\lambda^2\varphi(u,v,w,p)+\lambda\left(u_1\frac{\partial\varphi}{\partial u}+v_1\frac{\partial\varphi}{\partial v}+w_1\frac{\partial\varphi}{\partial w}+p_1\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)+\varphi(u_1,v_1,w_1,p_1)=0.$$

Presupunând că (u_1,v_1,w_1,p_1) este unul din aceste plane, atunci $\varphi(u_1,v_1,w_1,p_1)=0$ și ecuația precedentă ia forma

$$\lambda^2\varphi(u,v,w,p)+\lambda\left(u_1\frac{\partial\varphi}{\partial u}+v_1\frac{\partial\varphi}{\partial v}+w_1\frac{\partial\varphi}{\partial w}+p_1\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right)=0.$$

Pentru ca și al doilea plan să se reducă la planul (u_1,v_1,w_1,p_1), trebue ca

$$u_1\frac{\partial\varphi}{\partial u}+v_1\frac{\partial\varphi}{\partial v}+w_1\frac{\partial\varphi}{\partial w}+p_1\frac{\partial\varphi}{\partial p}=0,$$

sau

$$u\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}+v\frac{\partial\varphi}{\partial v_1}+w\frac{\partial\varphi}{\partial w_1}+p\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}=0$$

Dar această ecuație reprezintă un punct $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_1},\frac{\partial\varphi}{\partial v_1},\frac{\partial\varphi}{\partial w_1},\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\right)$, care se află în planul (u_1,v_1,w_1,p_1), căci $u_1\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}+v_1\frac{\partial\varphi}{\partial v_1}+w_1\frac{\partial\varphi}{\partial w_1}+p_1\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}=2\varphi(u_1,v_1,w_1,p_1)=0$, și prin care punct vor trece toate planele (u,v,w,p), astfel că cele două plane tangente duse la cuadrică prin dreapta de intersecție a planelor (u_1,v_1,w_1,p_1), (u,v,w,p) se confundă cu planul (u_1,v_1,w_1,p_1). Dar, singurul punct din planul tangent (u_1,v_1,w_1,p_1) la cuadrica $\varphi=0$, care se bucură de această proprietate, este punctul său de contact cu cuadrica. Deci, punctul de contact al cuadricei $\varphi(u,v,w,p)=0$ cu planul tangent (u_1,v_1,w_1,p_1) [adică $\varphi(u_1,v_1,w_1,p_1)=0$] are coordonatele punctuale

$$\rho x=\frac{\partial\varphi}{\partial u_1},\quad \rho y=\frac{\partial\varphi}{\partial v_1},\quad \rho z=\frac{\partial\varphi}{\partial w_1},\quad \rho t=\frac{\partial\varphi}{\partial p_1},$$

ρ fiind un factor de proporționalitate.

11. PRINCIPIUL DUALITĂȚII. Fiind dată o conică (C), să considerăm polara μ a punctului M în raport cu conica (C). Când punctul M descrie o curbă (M), polara μ înfășoară o curbă (μ), astfel că dacă punctul M face parte dintr'o figură (F), polara μ face parte din altă figură (Φ). Figurile (F) și (Φ) se zic polare reciproce în raport cu conica (C). Considerând două puncte M, M' ale figurei (F), le corespund două drepte μ și μ' ale figurei (Φ), astfel că după teoria polului și polarei, urmează că polara, în raport cu conica (C), a punctului de intersecție N a dreptelor μ și μ' este dreapta MM'.

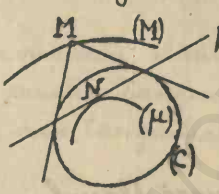

Fig. 2.

Când punctele M și M' sunt infinit vecine, și polarele μ și μ' sunt infinit vecine, punctul N tinde către punctul de contact al polarei μ cu curba (μ), iar dreapta MM' către tangenta în M al curbei (M). Rezultă deci că polarele punctelor curbei (μ) sunt tangente la curba (M) și că, prin urmare, polara reciprocă a figurei (Φ) este figura (F).

Această teorie a polarelor reciproce, descoperită de Poncelet, a condus pe Gergonne la principiul dualității, care permite a deduce, de ex., din orice propoziție de Geometrie plană, unde figurează relațiuni între puncte și drepte, o altă propoziție nouă unde dreptele primei figuri sunt înlocuite prin puncte și viceversa. Odată cu descoperirea acestui principiu, s'a simțit nevoia

introducerii coordonatelor tangențiale de către Chasles și Plücker.

Așa, de ex., din teorema lui Pascal, relativă la un exagon înscris într-o conică, unde laturile opuse se taie în trei puncte colineare (pe o dreaptă), rezultă teorema lui Brianchon, relativă la un exagon circumscris unei conice, unde dreptele care unesc punctele opuse se taie în același punct.

12. FIGURI CORELATIVE. Considerând două figuri (F) și (F'), care se corespund punctual și biunivoc, formulele de transformare sunt

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1t, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2t, \\ z' &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3t, \\ t' &= a_4x + b_4y + c_4z + d_4t, \end{aligned}$$

care reprezintă transformarea omografică cea mai generală, unde (x,y,z,t), (x',y',z',t') sunt două puncte omologe ale figurilor (F) și (F'). Se poate ușor arăta că raportul anarmonic a patru puncte colineare a primei figuri este egal cu raportul anarmonic al punctelor corespunzătoare ale figurei transformate. Această proprietate, a conservării raportului anarmonic, poate servi ca definiție a transformării omografice.

Dar, transformarea prin polare reciproce ne-a arătat că două figuri se pot corespunde nu numai punct cu punct, ca în transformarea omografică, ci și la un punct al primei figuri corespunde o dreaptă a figurei a doua, cum este în Geometria plană, sau unui punct al primei figuri corespunde un plan al figurei a doua, cum este în spațiu.

Formulele, în această transformare prin polare reciproce, sunt

$$U = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad V = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad W = \frac{\partial f}{\partial z}, \quad P = \frac{\partial f}{\partial t},$$

$f(x,y,z,t) = 0$ fiind ecuația cuadricei în raport cu care se iau planele polare, (x,y,z,t), (U,V,W,P) fiind coordonatele punctuale și tangențiale a unui punct al primei figuri și a unui plan a figurei polare reciproce.

Să considerăm transformarea generală

$$\begin{aligned} U &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1t, \\ V &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2t, \\ W &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3t, \\ P &= a_4x + b_4y + c_4z + d_4t, \end{aligned} \tag{8}$$

care face ca la un punct (x,y,z,t) al primei figuri să corespundă planul (U,V,W,P) al figurei transformate. Această transformare se zice corelativă, iar figurile se zic corelative.

Să presupunem că punctul (X,Y,Z,T) al figurei a doua descrie planul

$$UX + VY + WZ + PT = 0.$$

Înlocuind pe U, V, W, P cu valorile lor (8), se obține un rezultat de forma

$$ux + vy + wz + pt = 0,$$

și identificând, avem

$$(9)\qquad \begin{aligned} u &= a_1X + a_2Y + a_3Z + a_4T,\\ v &= b_1X + b_2Y + b_3Z + b_4T,\\ w &= c_1X + c_2Y + c_3Z + c_4T,\\ p &= d_1X + d_2Y + d_3Z + d_4T, \end{aligned}$$

care fac să corespundă unui punct (X,Y,Z,T) al figurei a doua, un plan (u,v,w,p) al figurei întâi.

Funcțiunile lineare de x,y,z,t, care figurează în membrul al doilea al relațiilor (8), pot fi considerate drept coordonatele tetraedrice (x_1,y_1,z_1,t_1) ale punctului (x,y,z,t) în raport cu un tetraedru (T_1) diferit de tetraedrul (T) la care sunt raportate relațiile (8). Astfel că formulele de transformare corelativă cea mai generală pot fi aduse la formele

$$U = x_1,\ V = y_1,\ W = z_1,\ P = t_1,$$

coordonatele U,V,P și x_1,y_1,z_1,t_1 fiind relative la două tetraedre diferite. Formulele (9) ne dau atunci

$$X = u_1,\ Y = v_1,\ Z = w_1,\ T = p_1.$$

Se vede deci că orice propoziție în care nu intervin nici forma tetraedrului și nici parametrii a,b,c,d (de referință), se va aplica de la sine la toate figurile omografice și corelative.

Un exemplu simplu de transformare corelativă îl găsim presupunând că suprafața $f(x,y,z,t)=0$, pe care o descrie punctul $M(x,y,z,t)$, se confundă cu cuadrica în raport cu care se iau polarele. În această transformare fiecărui punct M al cuadricei $f(x,y,z,t)=0$ îi corespunde planul tangent în acest punct la cuadrică, iar formulele de transformare sunt

$$(10)\qquad U = \frac{\partial f}{\partial x},\ V = \frac{\partial f}{\partial y},\ W = \frac{\partial f}{\partial z},\ P = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Suprafața corelativă obținută cu această transformare este însăși cuadrica $f(x,y,z,t)=0$, iar ecuația

$$\varphi(U,V,W,P) = 0,$$

obținută eliminând pe x,y,z,t între formulele (10) și $f(x,y,z,t)=0$, este ecuația tangențială a cuadricei $f=0$, unde U,V,W,P reprezintă coordonate tangențiale.

DEFINIȚIUNI METRICE.

RELAȚII METRICE ÎN PLAN.

13. CONICELE ȘI DIVIZIUNILE OMOGRAFICE. Să considerăm dreptele $\alpha=0, \beta=0, \gamma=0, \delta=0$, care se taie în punctele 1, 2, 3, 4 (Fig. 3). Ecuația

$$\alpha\gamma = \beta\delta$$

reprezintă o conică (C) circumscrisă patrulaterului 1234. Ecuațiile

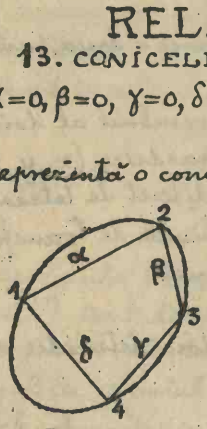

Fig. 3

$$(1) \qquad \alpha = \lambda\beta, \quad \delta = \lambda\gamma$$

reprezintă două drepte care se taie într'un punct M al conicei (C). Când λ variază, prima ecuație reprezintă un fascicol de drepte cu vârful în punctul 2, iar a doua un fascicol de drepte cu vârful în punctul 4. Cum raportele anarmonice a patru drepte a fiecărui fascicol depind numai de valorile lui λ, urmează că raportul anarmonic a patru drepte ce unesc punctul 2 cu patru puncte ale conicei este egal cu raportul anarmonic a patru drepte care unesc punctul 4 cu aceleași puncte.

Considerând cele patru puncte ca fixe și punctele 2 și 4 ca variabile, urmează că fiind date patru puncte A, B, C, D pe o conică, raportul anarmonic al dreptelor MA, MB, MC, MD care unesc un punct M al conicei cu aceste patru puncte este constant.

Făcând calcule analoage în coordonate tangențiale, sau transformând această proprietate prin dualitate, rezultă că o tangentă variabilă la o conică interceptează pe patru tangente fixe patru puncte al căror raport anarmonic este constant.

Deci, raportul anarmonic a patru puncte ale unei conice este, sau raportul anarmonic al celor patru drepte ce unesc aceste patru puncte fixe cu un punct variabil al conicei, sau raportul anarmonic al celor patru puncte unde o tangentă variabilă la conică taie tangentele în cele patru puncte date ale conicei.

În general, să considerăm două fascicole omografice (punctuale sau tangențiale), definite prin ecuațiile

$$(2) \qquad \alpha = \lambda\beta, \quad \delta = \lambda'\gamma, \quad A\lambda\lambda' + B\lambda + C\lambda' + D = 0,$$

unde A, B, C, D sunt constante. Ecuațiile (1) corespund cazului când $\lambda = \lambda'$. Eliminând pe λ și λ' între aceste ecuații (2), se obține o ecuație de gradul al doilea. Deci, punctul de intersecție a razelor corespunzătoare a două fascicole omografice de drepte descrie o conică trecând prin vârfurile celor două fascicole; dreapta care unește două puncte corespunzătoare a două diviziuni omografice pe două drepte rămâne tangentă la o conică tangentă la cele două drepte.

Relația omografică cea mai generală fiind $A\lambda\lambda' + B\lambda + C\lambda' + D = 0$, sau

(3) $$\lambda' = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d},$$

elementele duble sunt date de

(4) $$z = \frac{az+b}{cz+d}, \quad cz^2 + (d-a)z - b = 0,$$

care se obține făcând $\lambda = \lambda' = z$ în ecuația (3). Presupunând aceste elemente duble distincte, să le notăm cu α și β. Avem

$$\alpha = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d},$$

pe care scăzând-o din (3), obținem

(5) $$\lambda' - \alpha = \frac{a\lambda+b}{c\lambda+d} - \frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}, \quad \lambda' - \alpha = \frac{(\lambda-\alpha)(ad-bc)}{(c\lambda+d)(c\alpha+d)}.$$

În mod analog, avem

$$\lambda' - \beta = \frac{(\lambda-\beta)(ad-bc)}{(c\lambda+d)(c\beta+d)}.$$

Împărțind aceste două ultime relații, obținem

(6) $$\frac{\lambda-\alpha}{\lambda-\beta} = \frac{c\alpha+d}{c\beta+d}\,\frac{\lambda'-\alpha}{\lambda'-\beta}, \quad \frac{\lambda-\alpha}{\lambda-\beta} = h\,\frac{\lambda'-\alpha}{\lambda'-\beta},$$

care este forma canonică a relației omografice (3).

Tot de aci rezultă

$$R(\lambda, \lambda', \alpha, \beta) = \frac{\lambda-\alpha}{\lambda-\beta} : \frac{\lambda'-\alpha}{\lambda'-\beta} = h = \text{const.},$$

adică, raportul anarmonic a două elemente omografice și al elementelor duble este constant.

Când elementele duble sunt egale, $\alpha = \beta$, ecuația (4) devine $c(z-\alpha)^2 = 0$, pe care identificând-o cu (4), rezultă

$$d - a = -2\alpha c, \quad -b = c\alpha^2.$$

Înlocuind în (5) pe b și d cu valorile lor scoase din relațiile precedente, obținem

$$\lambda' - \alpha = \frac{(\lambda-\alpha)(a-\alpha c)}{c(\lambda-\alpha) + a - \alpha c},$$

de unde

$$\frac{1}{\lambda'-\alpha} = \frac{c}{a-\alpha c} + \frac{1}{\lambda-\alpha}, \quad \frac{1}{\lambda'-\alpha} = K + \frac{1}{\lambda-\alpha},$$

care este forma canonică a relației omografice cu elementele duble confundate.

Relația omografică (3) se zice involutivă, când nu se schimbă, dacă se permută λ cu λ', ceea ce are loc când $\alpha = -d$; iar când relația omografică are forma $A\lambda\lambda' + B\lambda + C\lambda' + D = 0$, în cazul $B = C$. Înlocuind în relația (6) pe d cu $-a$, apoi pe β cu $-\alpha + \frac{a-d}{c}$, căci suma elementelor duble α și β date de (4) este egală cu $\frac{a-d}{c}$, obținem

$$\frac{\lambda-\alpha}{\lambda-\beta} = -\frac{\lambda'-\alpha}{\lambda'-\beta},$$

care este forma canonică a relației involutive. Tot de aci mai rezultă că două elemente în involuție sunt acelea care divid armonic o pereche de elemente date α și β. Când elementele duble α și β sunt egale, relația involutivă ia forma

$$(\lambda-\alpha)(\lambda'-\alpha) = 0.$$

14. DEFINIȚIA UNGHIULUI, ABSCISEI ȘI A DISTANȚEI. Fie (x, y), (x', y') coordonatele rectangulare a două puncte reale sau imaginare A, B. Să considerăm cantitățile d și α definite cu relațiile

(7) $$x' - x = d\cos\alpha, \quad y' - y = d\sin\alpha,$$

de unde

$$(8)\qquad tg\alpha = \frac{y'-y}{x'-x},\quad d = \frac{x'-x}{\cos\alpha} = \frac{y'-y}{\sin\alpha}.$$

Unghiul α este determinat afară de un multiplu de π.

Dacă alegem valoarea lui α dată de prima din formulele (8), d va fi cunoscut în mărime și în semn. Pentru a ține seamă de ordinea în care se iau punctele A și B, vom numi d abscisa AB. Avem

$$AB + BA = 0,$$

și, în general, $\qquad AB + BC + \cdots + LA = 0.$

Cum AB nu-și schimbă nici semnul nici valoarea când α se mărește sau se micșorează cu un multiplu de 2π, pe când se schimbă de semn, când α se mărește sau se micșorează cu un multiplu impar de π, vor fi numai două sensuri pe o dreaptă reală sau imaginară.

De oarece avem $\qquad d^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2,$

d este distanța dintre cele două puncte și se vede că are două valori egale și de semne contrarii.

Când $\qquad d^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 = 0,$

atunci

$$\frac{y-y'}{x-x'} = \pm i,$$

dreapta AB este izotropă sau de lungime nulă. Pentru dreptele izotrope, noțiunea de unghi dispare complect. Făcând în formulele (7) $d=0$, urmează $\cos\alpha = \infty$, $\sin\alpha = \infty$, și înlocuind aceste linii prin expresiile lor în exponențiale, se găsește $\alpha = \pm\infty i$, și astfel unghiul devine infinit imaginar.

După formulele (7), valorile lui α sunt aceleași pentru două drepte paralele. Vom zice că α este unghiul pe care ele le formează cu Ox. Însemnând cu m coeficientul unghiular al acestor drepte, avem

$$tg\alpha = m,\quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}},\quad \sin\alpha = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Cele două semne ale radicalului corespund celor două sensuri pe drepte.

Unghiul (D, D') a două drepte este egal cu $\alpha' - \alpha$ și este cunoscut afară de un multiplu de π, iar când s'a fixat un sens pe aceste drepte, unghiul este cunoscut afară de un multiplu par de π.

Coordonatele omogene a două puncte fiind (x, y, z), (x', y', z'), distanța dintre cele două puncte este

$$d^2 = \frac{(xz'-zx')^2 + (yz'-zy')^2}{z^2 z'^2}.$$

Pentru ca această distanță să devie nedeterminată, trebue să avem în primul rând

$$zz' = 0.$$

Presupunând $z'=0$ și anulând și numărătorul lui d, avem

$$z^2(x'^2 + y'^2) = 0.$$

Sunt două soluții, sau $z=0$, sau $x'^2 + y'^2 = 0$. Din prima rezultă că distanța a două puncte de la infinit este nedeterminată. Din a doua, se vede că punctele (x', y', z') sunt punctele circulare I și J și că distanța

de la orice punct (x, y, z) la punctele circulare este nedeterminată.

Pentru ca distanța să devie infinită, trebue să avem, de ex.,

$$z' = 0, \quad z(x'^2 + y'^2) \neq 0,$$

adică unul din punctele să fie la infinit și să nu fie unul din punctele circulare I sau J.

În mod analog, se vede că distanța de la un punct la o dreaptă,

$$\delta = \frac{y - mx - n}{\sqrt{1+m^2}},$$

este nedeterminată când punctul este la infinit pe dreaptă. Dacă dreapta este izotropă, distanța este nedeterminată sau infinită, după cum punctul este sau nu pe dreaptă.

15. RELAȚIUNEA LUI LAGUERRE. Să considerăm dreptele D și D', de coeficienți unghiulari $m = \operatorname{tg}\alpha$, $m' = \operatorname{tg}\alpha'$. Unghiul lor (D, D') este dat de relația

$$\operatorname{tg}(D, D') = \operatorname{tg}(\alpha' - \alpha) = \frac{m' - m}{1 + mm'}.$$

Însemnând cu O punctul lor de intersecție, să considerăm dreptele izotrope OI și OJ ce trec prin punctul O, de coeficienți unghiulari $\pm i$. Raportul anarmonic al fascicolului format de aceste patru drepte este

$$R(D', D, OI, OJ) = \frac{m' - i}{m' + i} : \frac{m - i}{m + i}.$$

Dezvoltând, avem

$$R(D', D), OI, OJ) = \frac{mm' + 1 + i(m' - m)}{mm' + 1 - i(m' - m)} = \frac{1 + i\,\dfrac{m' - m}{1 + m'm}}{1 - i\,\dfrac{m' - m}{1 + m'm}}$$

$$R(D', D, OI, OJ) = \frac{1 + i\operatorname{tg}(D, D')}{1 - i\operatorname{tg}(D, D')} = \frac{\cos(D, D') + i\sin(D, D')}{\cos(D, D') - i\sin(D, D')} = \frac{e^{i(D, D')}}{e^{-i(D, D')}},$$

$$R(D', D, OI, OJ) = e^{2i(D, D')},$$

de unde

$$(D, D') = \frac{1}{2i}\log R(D', D, OI, OJ),$$

care este formula lui Laguerre, ce dă unghiul a două drepte cu ajutorul raportului anarmonic al fascicolului format de cele două drepte D, D' și cele două drepte izotrope ce trec prin punctul lor de intersecție.

16. EXTINDEREA RELAȚIUNILOR TRIGONOMETRICE LA TRIUNGHIURILE IMAGINARE. Să considerăm mai întâi triunghiurile ale căror una din laturi este izotropă. Fie

(9) (D) $\quad x - x_0 = r\cos\alpha, \quad y - y_0 = r\sin\alpha,$

(10) (Δ) $\quad x - x_0 = r_1\cos\beta, \quad y - y_0 = r_1\sin\beta$

ecuațiile care definesc punctele a două drepte (D) și (Δ) care se taie în punctul (x_0, y_0). Să căutăm relația care există între abscisele x și x_1 a două puncte M, M_1, obținute la intersecția acestor drepte cu o dreaptă izotropă oarecare, a cărei ecuație este

(11) $$x + iy = \lambda.$$

Din relațiile (9), deducem

(12) $$x + iy - (x_0 + iy_0) = r(\cos\alpha + i\sin\alpha), \quad x + iy - (x_0 + iy_0) = re^{i\alpha};$$

iar din (10),

(13) $$x+iy-(x_0+iy_0)=r_1e^{i\beta}.$$

Dar, $x+iy$ din ecuația (12) corespunde punctului M, iar $x+iy$ din ecuația (13) punctului M_1; cum din relația (11) se vede că aceste două expresii sunt egale pentru M și M_1, urmează, din (12) și (13),

$$re^{i\alpha}=r_1e^{i\beta},\quad r=r_1e^{i(\beta-\alpha)},$$

(14) $$r=r_1e^{i(D,\Delta)}.$$

Așa fiind, să însemnăm cu A, B, C vârfurile unui triunghi imaginar (Fig. 4). Să fixăm un sens arbitrar pe fiecare din laturile sale. Abscisele BC, CA, AB vor fi perfect definite în mărime și în semn; să punem

$$BC=a,\ CA=b,\ AB=c.$$

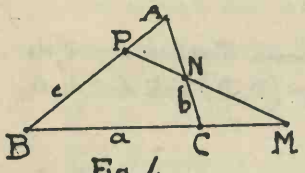

Fig. 4

Unghiul a două laturi este de asemenea definit, afară de un multiplu de 2π, căci s'a fixat un sens pe laturi și să punem, ca de obicei,

$$(a,b)=\pi-C,\ (b,c)=\pi-A,\ (c,a)=\pi-B.$$

Unghiurile A, B, C vor fi determinate afară de un multiplu de 2π.

Să luăm triunghiul ABC (Fig. 4) cu o dreaptă izotropă MNP, ca cea determinată de ecuația (11). Aplicând formula (14), avem

(15) $$\overline{AP}=\overline{AN}.e^{i(A-\pi)},\ \overline{BM}=\overline{BP}.e^{i(B-\pi)},\ \overline{CN}=\overline{CM}.e^{i(C-\pi)}.$$

Pe de altă parte, abscisele $\overline{AP}, \overline{AN}, \ldots$ sunt legate cu următoarele trei relații

(16) $$\overline{BM}=a+\overline{CM},\ \overline{CN}=\overline{AN}+b,\ \overline{AP}=c+\overline{BP}.$$

Înlocuind în a doua din aceste relații pe CN, AN cu valorile lor din (15), avem

(17) $$\overline{CM}\,e^{iC}-\overline{AP}\,e^{-iA}+b=0.$$

Din a doua din relațiile (15), avem

$$\overline{BM}+\overline{BP}\,e^{iB}=0.$$

Înlocuind pe BM și BP cu valorile lor din (16), relația precedentă devine

(18) $$a+\overline{CM}+(\overline{AP}-c)e^{iB}=0.$$

Cum punctul M a fost ales arbitrar, ecuațiile (17) și (18) trebue să dea aceeași valoare pentru $\overline{AP}$. Egalând ambele valori ale lui $\overline{AP}$, obținem

$$ce^{iB}-a-\overline{CM}\equiv(b+CMe^{iC})e^{i(A+B)},$$

de unde, egalând coeficienții lui CM și termenul liber, avem

(19) $$e^{-iC}=-e^{i(A+B)}=\frac{a-ce^{iB}}{b}.$$

Dacă am fi ales o dreaptă izotropă de coeficient unghiular $-i$, am avea

$$e^{iC}=-e^{-i(B+A)}=\frac{a-ce^{-iB}}{b}.$$

Din primele două rapoarte (19), deducem

(20) $$A+B+C=(2K+1)\pi.$$

Egalând primul și al treilea raport, avem

$$b(\cos C+i\sin C)=a-c(\cos B-i\sin B),$$

de unde, egalând părțile reale și coeficienții lui i,

(21) $$a = b\cos C + c\cos B,$$

(22) $$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Ecuațiile (20), (21), (22) conțin toate relațiunile posibile între cele șase elemente ale triunghiului ABC și vedem astfel că formulele de Trigonometrie se aplică și triunghiurilor imaginare.

RELAȚIUNI METRICE ÎN SPAȚIU.

17. DISTANȚA DINTRE DOUĂ PUNCTE. Distanța dintre punctele $(x,y,z,t), (x',y',z',t')$ fiind

$$d^2 = \frac{(xt'-tx')^2+(yt'-ty')^2+(zt'-tz')^2}{t^2t'^2},$$

pentru ca aceasta să fie nedeterminată, trebue ca numărătorul și numitorul să fie nule, și prin urmare, ca cel puțin unul din puncte să fie aruncat la infinit.

Să presupunem, de ex., că $t'=0$. Numărătorul se reduce atunci la

$$t^2(x'^2+y'^2+z'^2)=0$$

Trebue deci, sau ca $t=0$, și atunci ambele puncte sunt la infinit, sau ca unul din puncte fiind oarecare, celalt verifică relațiile

(1) $$t'=0,\quad x'^2+y'^2+z'^2=0.$$

Aceste două ecuații definesc cercul imaginar de la infinit, prin care trec toate sferele $x^2+y^2+z^2-2axt-2byt-2czt+dt^2=0$.

Distanța de la oricare din punctele sale la orice punct al spațiului apare ca nedeterminată.

Pentru două puncte $(x',y',z'), (x'',y'',z'')$ la distanță finită, distanța este nulă când $(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2=0$, adică între parametrii directori a, b, c ai dreptei, să avem relația

(2) $$a^2+b^2+c^2=0,$$

când dreapta se zice izotropă. Punctul de la infinit al acestei drepte (când coordonatele $(a,b,c,0)$, se vede, din relația (2), că acest punct este pe cercul (1), adică dreapta se unește cele două puncte în care întâlnește cercul de la infinit. Toate dreptele izotrope care trec printr'un punct la distanță finită, nasc o sferă de rază nulă, cu centrul în acest punct, sau încă un con izotrop cu vârful în acest punct.

Planul $Ax+By+Cz+D=0$ se zice izotrop, când $A^2+B^2+C^2=0$.

18. DEFINIȚIA UNGHIULUI. Să considerăm două drepte de parametrii directori $(a,b,c), (a',b',c')$. Unghiul V al acestor drepte este dat de

(3) $$\cos V = \frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}},$$

de unde se deduce

(4) $$\sin V = \frac{\sqrt{(bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2+(ab'-ba')^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}.$$

Aceste formule conțin trei radicali, ale căror semne sunt independente. Deci, toate valorile unghiului sunt cuprinse în formula

$$V = \pm V_0 + K\pi,$$

V însemnând una oarecare din ele. Chiar când s'a fixat sensul pe cele două drepte, unghiul V este dat de formula

$$V = \pm V_0' + 2K\pi.$$

Nedeterminarea nu dispare de cât când s'a fixat un semn pentru fiecare radical. Știm că, pentru cele care figurează în expresia lui $\cos V$, fixarea unui semn radicalului echivalează cu determinarea unui sens pe cele două drepte al căror unghi se caută. Să interpretăm înseninarea geometrică pe care o putem da fixării semnului celui de al treilea radical

$$\sqrt{(bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2+(ab'-ba')^2},$$

care figurează în expresia lui $\sin V$. Pentru aceasta, să observăm că perpendiculara comună la cele două drepte al căror unghi se caută are parametrii directori $(bc'-cb',\ ca'-ac',\ ab'-ba')$ și deci, a fixa un semn pentru radicalul ce figurează în $\sin V$, echivalează cu a atribui un sens acestei perpendiculare.

Putem da o altă expresie a unghiului a două drepte. În adevăr, fie A și A' două puncte la infinit, ale căror coordonate $(a,b,c,0)$, $(a',b',c',0)$ definesc două direcții. Să căutăm intersecția dreptei AA' cu cercul imaginar de la infinit. Aplicând metoda generală, vom determina valorile lui λ corespunzătoare punctelor μ și μ' de intersecție cu ecuația

$$(a+\lambda a')^2+(b+\lambda b')^2+(c+\lambda c')^2=0,$$

sau

$$\lambda^2(a'^2+b'^2+c'^2)+2\lambda(aa'+bb'+cc')+a^2+b^2+c^2=0. \tag{5}$$

Însemnând cu λ și λ' valorile lui λ care corespund punctelor μ și μ', avem

$$R(A,A',\mu,\mu')=\frac{\lambda}{\lambda'}.$$

Notând cu r acest raport, pentru a-l determina, să observăm că

$$\frac{(r+1)^2}{r}=\frac{\left(\frac{\lambda}{\lambda'}+1\right)^2}{\frac{\lambda}{\lambda'}}=\frac{(\lambda+\lambda')^2}{\lambda\lambda'}.$$

Înlocuind pe $\lambda+\lambda'$, $\lambda\lambda'$ cu valorile lor din ecuația (5), avem

$$\frac{(r+1)^2}{r}=\frac{4(aa'+bb'+cc')^2}{(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)}$$

și ținând seamă de (3), găsim

$$\frac{(r+1)^2}{r}=4\cos^2 V,$$

de unde

$$r^2+2r(1-2\cos^2 V)+1=0,$$

iar rădăcinile acestei ecuații sunt date de

$$r=-1+2\cos^2 V\pm 2i\cos V\sqrt{1-\cos^2 V}=\cos 2V\pm i\sin 2V,\quad r=e^{\pm 2iV},$$

și sunt

$$r=e^{2iV},\quad r'=e^{-2iV}.$$

Observând că aceste două valori sunt reciproce, avem

$$e^{2iV}=r,\quad V=\frac{1}{2i}\log R(A,A',\mu,\mu').$$

Am găsit deci pentru unghi o expresie analoagă cu cea din Geometria plană, cu deosebire că aci se iau în locul punctelor I și J al planului paralel cu cele două direcții cele două puncte μ și μ' unde acest plan taie cercul de la infinit.

NOȚIUNI DE GEOMETRIE SFERICĂ.

19. GENERATOARELE RECTILINII ALE SFEREI. Să însemnăm cu

$$aP^2 + bQ^2 + cR^2 + dS^2 = 0$$

ecuația unei cuadrice raportată la un tetraedru conjugat. Nefăcând nici o distincție între real și imaginar, se poate aduce această ecuație la forma

$$PQ = RS, \tag{1}$$

descompunând în doi factori $aP^2 + bQ^2$ și $cR^2 + dS^2$.

Forma redusă (1) pune în evidență două sisteme (λ), (μ) de generatoare ale suprafeței,

$$R = \lambda P,\ Q = \lambda S;\quad R = \mu Q,\ P = \mu S.$$

De unde

$$\frac{P}{\mu} = \frac{Q}{\lambda} = \frac{R}{\lambda\mu} = \frac{S}{1},$$

și deci, coordonatele unui punct oarecare al cuadricei vor fi reprezentate, într'un sistem de coordonate tetraedrice oarecare, prin formule de forma

$$\begin{aligned}
\rho X &= a_1\lambda\mu + b_1\lambda + c_1\mu + d_1,\\
\rho Y &= a_2\lambda\mu + b_2\lambda + c_2\mu + d_2,\\
\rho Z &= a_3\lambda\mu + b_3\lambda + c_3\mu + d_3,\\
\rho T &= a_4\lambda\mu + b_4\lambda + c_4\mu + d_4,
\end{aligned}$$

ρ fiind un factor de proporționalitate.

Să considerăm patru generatoare din sistemul (λ), corespunzătoare valorilor $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$. Acestea sunt tăiate de o generatoare din sistemul (μ) în punctele m_1, m_2, m_3, m_4, care sunt în planele

$$R = \lambda_1 P,\ R = \lambda_2 P,\ R = \lambda_3 P,\ R = \lambda_4 P. \tag{2}$$

Aceste plane tăiându-se după aceeași dreaptă $R=0, P=0$, raportul anarmonic al acestor patru puncte m_i este evident egal cu acela al valorilor corespunzătoare λ_i și deci <u>raportul anarmonic al celor patru puncte unde patru generatoare fixe de un sistem sunt tăiate de o generatoare oarecare din celalt sistem este un număr constant</u>.

Să considerăm acum o secțiune plană oarecare (Σ). Ea tae dreapta $R=0$, $P=0$ într'un punct α și cele patru plane reprezentate de ecuațiile (2) tae planul conicei (Σ) după patru drepte întâlnind întâi conica (Σ) în punctul α, și în alte patru puncte $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$. Planele (2) tae planul secțiunei după dreptele $\alpha\mu_1, \alpha\mu_2, \alpha\mu_3, \alpha\mu_4$, al căror raport anarmonic este același ca al celor patru plane, adică egal cu raportul anarmonic al parametrilor $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$. Dar acest raport anarmonic al celor patru drepte $\alpha\mu_i$ este egal cu acela al celor patru puncte μ_i de pe conica (Σ). Deci, <u>dacă se consideră patru puncte $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ pe o secțiune plană oarecare a cuadricei, raportul lor anarmonic evaluat considerându-le ca aparținând la această secțiune, va fi egal cu acela al generatoarelor ale unuia sau celuilalt sistem care se tae în aceste patru puncte</u>,

înțelegând prin raportul anarmonic a patru generatoare rectilinii aparținând unui sistem, acela al celor patru puncte unde ele taie o generatoare oarecare din celalt sistem.

În cazul sferei $x^2+y^2+z^2=1$,

a cărei ecuație se poate scrie

$$(x+iy)(x-iy)=(1-z)(1+z),$$

ecuațiile

$$\frac{x+iy}{1-z}=\alpha=\frac{1+z}{x-iy},$$

$$\frac{x-iy}{1-z}=-\frac{1}{\beta}=\frac{1+z}{x+iy}$$

definesc cele două sisteme de generatoare rectilinii α și β ale sferei. Expresiunile lui x, y, z în funcțiune de α și β sunt

$$(3)\qquad x=\frac{1-\alpha\beta}{\alpha-\beta},\quad y=i\frac{1+\alpha\beta}{\alpha-\beta},\quad z=\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}.$$

Variabilele α și β definesc un sistem de coordonate curbilinii imaginare ale sferei. Generatoarele rectilinii pentru care $\alpha=$ const., vor fi zise de primul sistem; acelea, de-a lungul cărora $\beta=$ const., generatoarele rectilinii de al doilea sistem. Pentru a trece de la un punct la punctul diametral opus, va fi destul a schimba α cu β.

20. EXPRESIUNEA DISTANȚEI A DOUĂ PUNCTE ALE SFEREI.

Să considerăm pe sfera de rază 1 două puncte M și M', ale căror coordonate sunt de forma (3), corespunzătoare valorilor (α,β), (α',β'). Unghiul dreptelor OM și OM' are ca măsură arcul de cerc mare ce unește cele două puncte și este definit de relația

$$\cos MM'=xx'+yy'+zz'=\frac{-2\alpha\beta-2\alpha'\beta'+(\alpha+\beta)(\alpha'+\beta')}{(\alpha-\beta)(\alpha'-\beta')}.$$

De unde

$$\sin^2\frac{MM'}{2}=\frac{(\alpha-\alpha')(\beta-\beta')}{(\alpha-\beta)(\alpha'-\beta')},\quad \cos^2\frac{MM'}{2}=\frac{-(\alpha-\beta')(\beta-\alpha')}{(\alpha-\beta)(\alpha'-\beta')},\quad tg^2\frac{MM'}{2}=-\frac{(\alpha-\alpha')(\beta-\beta')}{(\alpha-\beta')(\beta-\alpha')}.$$

Putem da o altă expresiune a unghiului direcțiilor OM și OM'. Pentru aceasta, să notăm cu P unul din polii arcului MM'. Cele două generatoare care se taie în P, vor întâlni cercul mare MM' în cele două puncte I și J ale sale, care sunt la infinit. Obținem astfel patru puncte pe cercul mare MM' și însemnând cu m un punct al acestui cerc mare, după relația lui Laguerre, avem

$$\sphericalangle MmM'=\frac{1}{2i}\log R(mM,mM',mI,mJ)=\frac{1}{2i}\log R(M,M',I,J).$$

Dar O fiind centrul cercului mare MM', arcul MM' este măsurat de unghiul la centru MOM' egal cu îndoitul lui MmM', și deci

$$\text{arc}\,MM'=\frac{1}{i}\log R(M,M',I,J),$$

sau

$$(4)\qquad e^{iMM'}=R(M,M',I,J),$$

raportul anarmonic din membrul al doilea fiind acela al celor patru puncte pe cercul mare MM'. Se vede că acest unghi este determinat în mărime și în semn, afară de un multiplu de 2π.

UNIVERSITATEA DIN IAȘI
SEMINARUL MATEMATIC

21. RELAȚIUNE METRICĂ FUNDAMENTALĂ RELATIVĂ LA O GENERATOARE RECTILINIE A SFEREI. AM fiind un arc de cerc mare, să construim cercul (C) pentru care A este unul din poli, și să presupunem că s'a ales, pe acest cerc mare (C), unul din polii lui AM, pe care să-l notăm cu γ. Pentrucă cunoaștem acest pol γ, vom fixa un sens pozitiv pentru arce pe cercul mare AM; de altă parte, cum A este polul cunoscut al lui (C), vom putea face distincție între cele două puncte I și J ale cercului (C). Să considerăm o generatoare rectilinie, de primul sistem, de ex., care trece prin M; aceasta va tăia (C) într'un punct μ. Arcul $\mu\gamma$ va fi determinat, în mărime și în semn, prin ecuația

$$e^{i\overline{\mu\gamma}} = \mathcal{R}(\gamma, \mu, I, J), \tag{5}$$

raportul anarmonic fiind acela al celor patru puncte pe cercul (C). Se știe că acest raport anarmonic este egal cu acela al celor patru generatoare de primul sistem care trec prin aceste patru puncte, sau încă, cu acela al celor patru puncte unde aceste generatoare taie o altă secțiune plană a suprafeței. Pentru această secțiune vom alege cercul AM.

Dar, generatoarea care taie (C) în μ, taie pe AM în M; generatoarea care trece prin γ, polul lui AM, îl taie în punctul său la infinit I'; generatoarele de primul sistem care trec prin I și J sunt acelea care trec respectiv prin A al lui (C) și prin punctul A' diametral opus al sferei. Avem deci

$$e^{i\overline{\mu\gamma}} = \mathcal{R}(\gamma, \mu, I, J) = \mathcal{R}(I', M, A, A').$$

Raportul anarmonic al celor patru puncte I', M, A, A' se determină dacă se ia în planul cercului axe perpendiculare, cu origina în A și axa x tangenta în A la cercul AM și este egal cu

$$\mathcal{R}(I', M, A, A') = \frac{\sin\frac{I'A}{2}}{\sin\frac{I'A'}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{MA}{2}}{\sin\frac{MA'}{2}} = \frac{\sin\frac{I'A}{2}}{\cos\frac{I'A}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{MA}{2}}{\sin\frac{MA}{2}} = \operatorname{tg}\frac{I'A}{2}\operatorname{cotg}\frac{MA}{2}.$$

Dar AI' este dreapta izotropă ce trece prin A, de coeficient unghiular $\operatorname{tg}\frac{I'A}{2} = i$; deci

$$\mathcal{R}(I', M, A, A') = i\operatorname{cotg}\frac{AM}{2},$$

și înlocuind în (5),

$$\operatorname{tg}\frac{AM}{2} = ie^{i\overline{\gamma\mu}}. \tag{6}$$

Pentru a elimina pe μ, vom lua alt cerc mare trecând prin A și tăind generatoarea în M'. Avem

$$\operatorname{tg}\frac{AM'}{2} = ie^{i\overline{\gamma'\mu}}. \tag{7}$$

Împărțind relațiile (6) și (7), obținem

$$e^{i\overline{\gamma\gamma'}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{AM}{2}}{\operatorname{tg}\frac{AM'}{2}}, \tag{9}$$

iar $\overline{\gamma\gamma'}$ măsoară, în mărime și în semn, unghiul cercurilor AM și AM'. Aceasta este relația fundamentală relativă la o generatoare rectilinie a sferei.

22. FORMULELE TRIGONOMETRIEI SFERICE. Vom arăta, că și pentru Geometria plană, cum din relația fundamentală stabilită, se deduc toate formulele Trigonometrii sferice, fără să facem restricțiunea că triunghiurile considerate să fie reale, iar laturile pozitive sau inferioare lui π.

Fie ABC un triunghi sferic astfel definit. Dacă alegem arbitrar unul din polii fiecărei laturi, vom forma un triunghi polar $A'B'C'$, unde A', B', C' sunt respectiv polii laturilor BC, CA, AB, iar sensul arcelor pozitive fiind complect cunoscut pe fiecare din cele şase laturi ale acestor triunghiuri. Să punem

$$BC = a,\ CA = b,\ AB = c,\ B'C' = a',\ C'A' = b',\ A'B' = c',$$

aceste lungimi fiind determinate afară de un multiplu de 2π.

Să tăiem triunghiul ABC cu o generatoare rectilinie din primul sistem, care taie respectiv laturile BC, CA, AB în punctele M, N, P. Aplicând relaţia (8) triunghiului ANP, de ex., avem

$$e^{ia'} = \frac{tg\frac{AP}{2}}{tg\frac{AN}{2}}. \tag{9}$$

De asemenea

$$e^{ib'} = \frac{tg\frac{BM}{2}}{tg\frac{BP}{2}}, \qquad e^{ic'} = \frac{tg\frac{CN}{2}}{tg\frac{CM}{2}}. \tag{10}$$

Pe lângă cele trei relaţiuni (9), (10), mai avem

$$\begin{aligned} AP &= AB + BP = c + BP, \\ BM &= BC + CM = a + CM, \\ CN &= CA + AN = b + AN, \end{aligned} \tag{11}$$

de unde putem elimina trei din cele şase segmente $AP, BP, \ldots$. Eliminând M şi P, de ex., ajungem la o ecuaţie de gradul al doilea, care ar determina pe ex., $tg\frac{AN}{2}$. Cum punctul N poate fi ales arbitrar, această ecuaţie de gradul al doilea trebue să se reducă la o identitate, care va da trei relaţiuni între $e^{ia'}, e^{ib'}, e^{ic'}, tg\frac{a}{2}, tg\frac{b}{2}, tg\frac{c}{2}$. Aceste trei relaţii se pot obţine, presupunând că generatoarea rectilinie considerată trece succesiv prin cele trei vârfuri ale triunghiului.

Presupunând că trece prin vârful A, în care caz punctele N şi P se confundă cu A, ecuaţiile (10) şi (11) devin

$$tg\frac{BM}{2} = e^{ib'} tg\frac{BA}{2}, \quad tg\frac{CM}{2} = e^{-ic'} tg\frac{CA}{2}, \quad a + CM = BM.$$

Eliminând punctul M, obţinem

$$tg\frac{a}{2} + e^{ic'} tg\frac{b}{2} + e^{ib'} tg\frac{c}{2} = e^{i(b'-c')} tg\frac{a}{2} tg\frac{b}{2} tg\frac{c}{2}. \tag{12}$$

La fel se mai pot obţine alte două relaţii analoage prin permutări circulare. Scriind următoarea

$$tg\frac{b}{2} + e^{-ia'} tg\frac{c}{2} + e^{ic'} tg\frac{a}{2} = e^{i(c'-a')} tg\frac{a}{2} tg\frac{b}{2} tg\frac{c}{2},$$

pe care s'o scădem din (12) înmulţită cu $e^{ic'}$, găsim

$$tg\frac{a}{2} tg\frac{b}{2} = \frac{1 - e^{i(a'+b'+c')}}{e^{ic'} - e^{i(a'+b')}}.$$

Punând $a' + b' + c' = 2p'$, relaţia precedentă devine

$$tg\frac{a}{2} tg\frac{b}{2} = \frac{\sin p'}{\sin(p' - c')},$$

şi deci, prin permutări circulare, suntem conduşi la ecuaţiile

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\frac{\sin p'}{\sin(p'-a')},\quad \operatorname{tg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\frac{\sin p'}{\sin(p'-b')},\quad \operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\frac{\sin p'}{\sin(p'-c')},$$

de unde decurg toate relațiile între elementele triunghiului.

Înmulțind ultimele două din aceste relații și ținând seamă de prima, avem

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\sin p'\sin(p'-a')}{\sin(p'-b')\sin(p'-c')}}.$$

Dar

$$\cos a=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}=\frac{\sin(p'-b')\sin(p'-c')-\sin p'\sin(p'-a')}{\sin(p'-b')\sin(p'-c')+\sin p'\sin(p'-a')}.$$

De oarece $2\sin p\sin q=\cos(p-q)-\cos(p+q)$, avem

$$\cos a=\frac{\cos(b'-c')-\cos(2p'-b'-c')-[\cos a'-\cos(2p'-a')]}{\cos(b'-c')-\cos(2p'-b'-c')+\cos a'-\cos(2p'-a')},$$

$$\cos a=\frac{\cos(b'-c')-\cos a'-\cos a'+\cos(b'+c')}{\cos(b'-c')-\cos(b'+c')},$$

$$\cos a=\frac{\cos b'\cos c'-\cos a'}{\sin b'\sin c'},\tag{13}$$

$$\cos a'=\cos b'\cos c'-\sin b'\sin c'\cos a.\tag{14}$$

În mod analog, avem

$$\cos b'=\cos c'\cos a'-\sin c'\sin a'\cos b,$$

$$\cos c'=\cos a'\cos b'-\sin a'\sin b'\cos c.\tag{15}$$

Calculând din relațiile (15) pe $\cos b$ și $\cos c$, apoi pe $\sin b=\sqrt{1-\cos^2 b}$, sinc și efectuând expresiunea $\cos b\cos c-\sin b\sin c\cos a'$, se obține tocmai valoarea lui $\cos a$ dată de (13) și deci avem relațiile

$$\begin{aligned}\cos a&=\cos b\cos c-\sin b\sin c\cos a',\\ \cos b&=\cos c\cos a-\sin c\sin a\cos b',\\ \cos c&=\cos a\cos b-\sin a\sin b\cos c',\end{aligned}\tag{16}$$

unde $a'=\pi-A$, $b'=\pi-B$, $c'=\pi-C$, care sunt formulele cunoscute ale trigonometriei sferice.

Acestea sunt alte trei relații distincte dintre elementele unui triunghi sferic, de unde se pot deduce celelalte. Se observă că între elementele unui triunghi sferic nu pot fi mai mult de trei relații distincte, astfel că pornind de la relațiile distincte (14) și (15), sau de la relațiile (16), se pot obține toate celelalte.

Noțiuni asupra deplasărilor în Geometria euclidiană clasică și iperbolică.

23. DEPLASĂRILE ÎN GEOMETRIA EUCLIDIANĂ CLASICĂ CU DOUĂ DIMENSIUNI. Geometria euclidiană clasică cu două dimensiuni constă în studiul grupului de deplasări care lasă invariabilă o formă cuadratică fundamentală dată

$$f(x_1-x_2, y_1-y_2) = a(x_1-x_2)^2 + b(y_1-y_2)^2 + c(x_1-x_2)(y_1-y_2),$$

relativă la punctele de coordonate (x_1, y_1), (x_2, y_2).

În Geometria euclidiană clasică cu două dimensiuni această formă cuadratică este

$$(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2, \tag{1}$$

care se ia ca pătratul distanței punctelor considerate. Dacă se consideră punctul (x, y) și punctul infinit vecin, $(x+dx, y+dy)$, forma diferențială a formei cuadratice este

$$dx^2 + dy^2 \tag{2}$$

și dă pătratul elementului de arc.

Se știe că transformarea liniară ortogonală

$$x = x_0 + X\cos\alpha - Y\sin\alpha, \quad y = y_0 + X\sin\alpha + Y\cos\alpha \tag{3}$$

reproduce[1] forma cuadratică (1) sau (2).

În coordonate omogene ecațiile (3) se pot scrie

$$\begin{aligned} x &= X\cos\alpha - Y\sin\alpha + x_0 Z, \\ y &= X\sin\alpha + Y\cos\alpha + y_0 Z, \\ z &= Z. \end{aligned} \tag{4}$$

Aceste transformări formează un grup, căci însemnând cu (F') poziția unei figuri date și (F'') și (F''') pozițiile figurei obținute cu două transformări (4), se poate trece de la figura (F') la (F''') direct cu o transformare analoagă, (4), fără a trece prin figura (F').

Să căutăm dacă există un punct dublu (x, y, z), care să coincidă cu omologul său (X, Y, Z). Coordonatele fiind omogene, trebue să avem

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z} = \rho.$$

Înlocuind pe x, y, z cu valorile lor ρX, ρY, ρZ în ecațiile (4), coordonatele (X, Y, Z) ale punctelor duble sunt date de ecațiile

$$\begin{aligned} X(\cos\alpha - \rho) - Y\sin\alpha + x_0 Z &= 0, \\ X\sin\alpha + (\cos\alpha - \rho)Y + y_0 Z &= 0, \\ (1-\rho)Z &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

al căror determinant este

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha - \rho & -\sin\alpha & x_0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha - \rho & y_0 \\ 0 & 0 & 1-\rho \end{vmatrix} = (1-\rho)(\rho^2 - 2\rho\cos\alpha - 1).$$

Sistemul (5) trebuind să admită soluții pentru X, Y, Z nu toate nule, trebue ca determinantul să fie nul, adică

$$(1-\rho)(\rho^2 - 2\rho\cos\alpha - 1) = 0,$$

de unde $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = e^{i\alpha}$, $\rho_3 = e^{-i\alpha}$.

Înlocuind pe $\rho = 1$ în primele două ecații (5), avem

---

[1] Transformarea generală, pentru care forma (2) este invariant, este $x = \varphi(X, Y)$, $y = \psi(X, Y)$, astfel că funcțiunea $\varphi(X, Y) + i\psi(X, Y)$ să fie analitică de $X + iY$, când transformarea este cu păstrare de similitudine infinitezimală.

$$X(\cos\alpha - 1) - Y\sin\alpha + x_0 Z = 0,$$
$$X\sin\alpha + (\cos\alpha - 1)Y + y_0 Z = 0,$$

care ne dau un punct P unic la distanță finită dacă determinantul sistemului, $(\cos\alpha-1)^2 + \sin^2\alpha = 2(1-\cos\alpha)$, este diferit de zero, adică dacă $\alpha \neq 0$; când $\alpha = 0$, atunci ecuațiile precedente se reduc la $Z=0$, adică toate punctele dreptei de la infinit sunt puncte duble, în care caz deplasarea considerată se reduce la o translație.

Înlocuind în (5) pe ρ cu $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $e^{-i\alpha}$, obținem

$$Z = 0, \quad X \pm iY = 0,$$

adică celelalte două puncte duble sunt punctele circulare $I(1, i, 0)$, $J(1, -i, 0)$.

Deci, deplasarea euclidiană clasică, definită de formulele (4), este o transformare proectivă ale cărei două din punctele duble sunt punctele circulare I și J. Aceste transformări fac parte din grupul transformărilor omografice, deci au proprietatea conservării raportului anarmonic. $A\Delta_1$ și $A\Delta_2$ fiind două drepte și $A'\Delta'_1$, $A'\Delta'_2$ corespunzătoarele lor, avem egalitatea raportelor anarmonice.

$$\mathcal{R}(A\Delta_1, A\Delta_2, AI, AJ) = \mathcal{R}(A'\Delta'_1, A'\Delta'_2, A'I, A'J).$$

Dar, după relația lui Laguerre,

$$V = \frac{1}{2i}\log \mathcal{R}(A\Delta_1, A\Delta_2, AI, AJ),$$

rezultă că unghiul V al dreptelor $A\Delta_1$, $A\Delta_2$ este egal cu al dreptelor $A'\Delta'_1$, $A'\Delta'_2$, deci unghiurile se păstrează.

În rezumat, în Geometria euclidiană clasică cu două dimensiuni, deplasările plane se reduc la translații și rotații. Însemnând cu (F_1) noua poziție a unei figuri obținută din figura (P) cu transformarea (3), și însemnând cu P punctul dublu real al transformării, se poate trece de la figura (F') la figura (F_1) cu o rotație de un unghi oarecare în jurul punctului P.

24. DEPLASĂRILE ÎN GEOMETRIA EUCLIDIANĂ CLASICĂ CU TREI DIMENSIUNI. I. Însemnând cu (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) coordonatele carteziene a două puncte M și M_1, Geometria euclidiană clasică cu trei dimensiuni este studiul deplasărilor care lasă neschimbată forma cuadratică

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2, \tag{6}$$

a cărei formă diferențială este

$$dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Se știe că aceste transformări sunt date de grupul transformărilor ortogonale (transformarea axelor de coordonate)

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a_1 X + b_1 Y + c_1 Z, \\ y &= y_0 + a_2 X + b_2 Y + c_2 Z, \\ z &= z_0 + a_3 X + b_3 Y + c_3 Z, \end{aligned} \tag{7}$$

unde determinantul

(1) A se vedea Borel, Introduction géométrique à quelques théories physiques, p. 6.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

este ortogonal și are valoarea egală cu ± 1, adică

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, \qquad a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0,$$
$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1, \qquad b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0,$$
$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1, \qquad c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 = 0.$$

În cazul $\Delta = 1$, se deduce $a_1 = b_2c_3 - c_2b_3, \ldots$, adică orice element al determinantului Δ este egal cu minorul său. Între cele 9 cosinusuri directoare $a_1, \ldots c_3$ există 6 relații distincte, mai rămân deci numai trei variabile. Cum în formulele (7) mai sunt trei cantități variabile, x_0, y_0, z_0, urmează că aceste deplasări depind de șase parametrii variabili.

Am văzut că relația (6), care reprezintă distanța $\overline{MM_1}^2$ este un invariant pentru aceste deplasări. Să considerăm trei puncte $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$. Avem

$$(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 = \left[(x_1 - x_3) - (x_1 - x_2)\right]^2 + \left[(y_1 - y_3) - (y_1 - y_2)\right]^2 + \left[(z_1 - z_3) - (z_1 - z_2)\right]^2 =$$
$$\left[(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2\right] + \left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2\right] -$$
$$2\left[(x_1 - x_3)(x_1 - x_2) + (y_1 - y_3)(y_1 - y_2) + (z_1 - z_3)(z_1 - z_2)\right].$$

Deci $2\left[(x_1 - x_3)(x_1 - x_2) + (y_1 - y_3)(y_1 - y_2) + (z_1 - z_3)(z_1 - z_2)\right] = \overline{M_1M_3}^2 + \overline{M_1M_2}^2 - \overline{M_2M_3}^2.$

Cum M_1M_2, M_2M_3, M_3M_1 sunt invarianți, urmează că și

$$(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) + (y_1 - y_2)(y_1 - y_3) + (z_1 - z_2)(z_1 - z_3)$$

este un invariant pentru aceste deplasări. Dar

$$\frac{\sum (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}{\sqrt{\sum (x_1 - x_2)^2} \cdot \sqrt{\sum (x_1 - x_3)^2}}$$

este cosinusul unghiului dreptelor M_1M_2, M_1M_3. Deci și unghiul este un invariant pentru aceste deplasări, adică și unghiurile se păstrează. Invarianța unghiurilor rezultă din aceea a distanțelor.

II. Translații. Printre deplasările reprezentate de ecuațiile (7) sunt translațiile

$$(8) \qquad x = x_0 + X', \quad y = y_0 + Y', \quad z = z_0 + Z'.$$

Scriind aceste relații în coordonate omogene, avem

$$x = x_0T' + X', \quad y = y_0T' + Y', \quad z = z_0T' + Z', \quad t = T',$$

Dacă punctul (X', Y', Z', T') coincide cu omologul său (x, y, z, t), trebue să avem $\frac{x}{X'} = \frac{y}{Y'} = \frac{z}{Z'} = \frac{t}{T'} = \rho.$

Înlocuind pe x, y, z, t, formulele (8) devin

$$(\rho - 1)X' = x_0, \quad (\rho - 1)Y' = y_0, \quad (\rho - 1)Z' = z_0, \quad (\rho - 1)T' = 0.$$

Din ultima rezultă sau $\rho = 1$, sau $T' = 0$. Dar, pentru $\rho = 1$, aceste ecuații sunt incompatibile. Rămâne de considerat numai $T' = 0$, iar din primele trei din aceste relații se găsesc valori determinate pentru X', Y', Z'. De aci rezultă că punctele care rămân invariabile față de translații sunt punctele planului de la infinit.

III. Rotație în jurul unei axe. Considerând deplasarea (7), se vede că punctul (x,y,z) la distanță finită care coincide cu omologul său (X,Y,Z), se obține făcând în (7) $x=X$, $y=Y$, $z=Z$. Deci, coordonatele acestui punct sunt date de ecuațiile

$$\begin{aligned}(a_1-1)X+b_1Y+c_1Z+x_0&=0,\\ a_2X+(b_2-1)Y+c_2Z+y_0&=0,\\ a_3X+b_3Y+(c_3-1)Z+z_0&=0,\end{aligned}$$

al căror determinant este

$$\delta=\begin{vmatrix}a_1-1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2-1 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}+$$
$$+a_1+b_2+c_3-1.$$

Dar $a_1=\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}$, $b_2=\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}$, $c_3=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}$, $\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=1$,

deci $\delta=0$. Așa dar, nu există nici un punct (X,Y,Z) la distanță finită care să rămâie invariabil în deplasarea (7). Obținem deci un rezultat contrariu ca în Geometria plană.

Înlocuind în (7) pe $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, omologul acestui punct este punctul O' de coordonate $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$. Făcând o translație (8), axele de coordonate $Oxyz$ se transportă paralel în O' și devin $O'X'Y'Z'$. Deplasarea rămasă din (7) este de forma

$$(9)\qquad\begin{aligned}X'&=a_1X+b_1Y+c_1Z,\\ Y'&=a_2X+b_2Y+c_2Z,\\ Z'&=a_3X+b_3Y+c_3Z,\end{aligned}$$

care este o rotație a triedrului format de axele de coordonate $O'X'Y'Z'$ până ajunge în noua poziție $O'XYZ$. Presupunând că o figură (F') este invariabil legată de triedrul $O'X'Y'Z'$, deplasarea (9) este o rotație a figurei (F') care are un punct fix O'.

Dar, dreapta $O'X$ poate fi adusă peste $O'X'$ cu o rotație în jurul unei axe $O'\delta$ ce este în planul perpendicular pe planul $X'O'X$ dus prin bisectoarea unghiului $X'O'X$. Deci, unghiul $XO'Y$ se poate aduce peste unghiul $X'O'Y'$ cu o rotație în jurul unei axe $O'\Delta$ ce este la intersecția planelor perpendiculare pe planele $X'O'X$, $Y'O'Y$, duse respectiv prin bisectoarele unghiurilor $X'O'X$, $Y'O'Y$. Deci triedrul $O'X'Y'Z'$ se poate aduce peste triedrul $O'XYZ$ cu o rotație de unghiul θ în jurul axei $O'\Delta$.

Așa dar, o figură care are un punct fix O' se poate aduce în altă poziție cu o rotație în jurul unei axe $O'\Delta$ ce trece prin punctul fix, astfel că deplasările în Geometria euclidiană cu trei dimensiuni se reduc la translații și rotații în jurul unei axe.

IV. Putem obține aceste rezultate pe cale analitică. Pentru aceasta, vom da mai întâi alte expresiuni pentru cosinusurile directoare $a_1,\dots c_3$

din deplasarea (9). Să considerăm o figură mobilă având punctul fix O'; dacă îi dăm o deplasare oarecare, exprimată cu relațiile (9), aceasta echivalează cu o rotație de unghiul θ în jurul unei axe $O'\Delta$ (Fig. 5). Deci, M fiind un punct al figurei și M' noua sa poziție după deplasare, este un plan trecând prin M' și M, perpendicular pe $O'\Delta$, și în acest plan un cerc ce trece prin M și M' cu centrul P pe $O'\Delta$. Tangentele în M și M' se taie în Q. Unghiul MPM' fiind egal cu θ, unghiul MPQ este egal cu $\frac{\theta}{2}$. Raportând figura la axele $O'X'Y'Z'$, și însemnând cu $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ cosinusurile directoare ale axei $O'\Delta$, ecuațiile acestei axe sunt

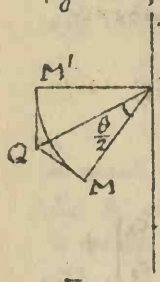

Fig. 5.

$$\frac{X'}{\cos\alpha} = \frac{Y'}{\cos\beta} = \frac{Z'}{\cos\gamma}.$$

Distanța de la punctul $M'(X', Y', Z')$ la această dreaptă este

$$M'P = \sqrt{(Y'\cos\gamma - Z'\cos\beta)^2 + (Z'\cos\alpha - X'\cos\gamma)^2 + (X'\cos\beta - Y'\cos\alpha)^2}.$$

Parametrii directori ai dreptei $O'M'$ fiind X', Y', Z', iar dreapta $M'Q$ fiind perpendiculară pe planul $M'O'P$ (pe dreptele $O'M', O'\Delta$), cosinusurile directoare p, q, r ale dreptei QM' verifică ecuațiile

$$pX' + qY' + rZ' = 0,$$
$$p\cos\alpha + q\cos\beta + r\cos\gamma = 0,$$

de unde

$$\frac{p}{Y'\cos\gamma - Z'\cos\beta} = \frac{q}{Z'\cos\alpha - X'\cos\gamma} = \frac{r}{X'\cos\beta - Y'\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{(Y'\cos\gamma - Z'\cos\gamma)^2 + \dots}} = \frac{1}{M'P},$$

$$p = \frac{Y'\cos\gamma - Z'\cos\beta}{M'P},\quad q = \frac{Z'\cos\alpha - X'\cos\gamma}{M'P},\quad r = \frac{X'\cos\beta - Y'\cos\alpha}{M'P}.$$

Din triunghiul dreptunghic $QM'P$, avem $QM' = M'P\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$, deci proiecțiile segmentului $M'Q$ pe axele $O'X', O'Y', O'Z'$ sunt

$$M'Q\cdot p = MP\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,\frac{Y'\cos\gamma - Z'\cos\beta}{MP} = (Y'\cos\gamma - Z'\cos\beta)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}, (Z'\cos\alpha - X'\cos\gamma)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}, (X'\cos\beta - Y'\cos\alpha)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}.$$

Luând

$$(10)\quad \frac{\lambda}{\rho} = \cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\theta}{2},\ \frac{\mu}{\rho} = \cos\beta\operatorname{tg}\frac{\theta}{2},\ \frac{\nu}{\rho} = \cos\gamma\operatorname{tg}\frac{\theta}{2},$$

proiecțiile lui $M'Q$ pe axe sunt

$$\frac{\mu Z' - \nu Y'}{\rho},\ \frac{\nu X' - \lambda Z'}{\rho},\ \frac{\lambda Y' - \mu X'}{\rho}.$$

Pentru a obține coordonatele (ξ, η, ζ) ale punctului Q, observăm că $pr\,O'Q = pr\,O'M' + M'Q$. Proiectând pe axele $O'X', O'Y', O'Z'$, avem

$$\xi = X' + \frac{\mu Z' - \nu Y'}{\rho}, \dots,$$

sau

$$\rho\xi = \rho X' + \mu Z' - \nu Y',$$
$$\rho\eta = \rho Y' + \nu X' - \lambda Z',$$
$$\rho\zeta = \rho Z' + \lambda Y' - \mu X'.$$

Înseamnând cu (X, Y, Z) coordonatele punctului M, observând că MQ este de sens contrar cu $M'Q$, printr-un calcul analog, obținem

$$\rho\xi = \rho X - \mu Z + \nu Y,\ \rho\eta = \rho Y - \nu X + \lambda Z,\ \rho\zeta = \rho Z - \lambda Y + \mu X.$$

Egalând valorile lui $\rho\xi, \rho\eta, \rho\zeta$, avem

$$(11)\qquad \begin{aligned} \rho X' + \mu Z' - \nu Y' &= \rho X - \mu Z + \nu Y,\\ \rho Y' + \nu X' - \lambda Z' &= \rho Y - \nu X + \lambda Z,\\ \rho Z' + \lambda Y' - \mu X' &= \rho Z - \lambda Y + \mu X. \end{aligned}$$

Înmulțind aceste ecuații respectiv cu $\frac{\lambda}{\rho}$, $\frac{\mu}{\rho}$, $\frac{\nu}{\rho}$ și adunând, avem

$$(12)\qquad \lambda X' + \mu Y' + \nu Z' = \lambda X + \mu Y + \nu Z.$$

Înmulțind acum ecuațiile (12) și (11) respectiv cu $\pm\lambda, \pm\mu, \pm\nu, \pm\rho$, astfel ca adunând, coeficientul necunoscutei X', Y', Z' să devie egal cu

$$(13)\qquad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = B,$$

avem

$$(14)\qquad \begin{aligned} BX' &= (\rho^2 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2)X + 2(\lambda\mu + \nu\rho)Y + 2(\lambda\nu - \mu\rho)Z,\\ BY' &= 2(\lambda\mu - \nu\rho)X + (\rho^2 + \mu^2 - \lambda^2 - \nu^2)Y + 2(\mu\nu + \lambda\rho)Z,\\ BZ' &= 2(\lambda\nu + \mu\rho)X + 2(\mu\nu - \lambda\rho)Y + (\rho^2 + \nu^2 - \lambda^2 - \mu^2)Z. \end{aligned}$$

care sunt formulele lui d'Olinde Rodrigues. Se poate lua $B = 1, \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = 1$, când cantitățile λ, μ, ν, ρ se zic parametrii cuaternioniani.

Dar coordonatele (X, Y, Z) ale punctului M se obțin din acelea ale punctului $M'(X', Y', Z')$ cu formulele (9), pe care comparându-le cu (14), $B = 1$, urmează

$$(15)\qquad \begin{cases} a_1 = \rho^2 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2, & b_1 = 2(\lambda\mu + \nu\rho), & c_1 = 2(\lambda\nu - \mu\rho),\\ a_2 = 2(\lambda\mu - \nu\rho), & b_2 = \rho^2 + \mu^2 - \lambda^2 - \nu^2, & c_2 = 2(\mu\nu + \lambda\rho),\\ a_3 = 2(\lambda\nu + \mu\rho), & b_3 = 2(\mu\nu - \lambda\rho), & c_3 = \rho^2 + \nu^2 - \lambda^2 - \mu^2; \end{cases}$$
$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = 1.$$

Acestea fiind stabilite, să căutăm dacă există o dreaptă $O'\Delta$, ce trece prin O', și care să rămâe invariabilă în deplasarea (9). Dacă (X, Y, Z) este un punct al acestei drepte $O'\Delta$, punctul (X', Y', Z') obținut din acesta cu deplasarea (9) va fi pe dreapta $O'\Delta$, dacă

$$\frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y} = \frac{Z'}{Z} = K.$$

Înlocuind în (9) pe X', Y', Z' cu KX, KY, KZ, cantitățile X, Y, Z sunt date de ecuațiile

$$(16)\qquad \begin{aligned} (a_1 - K)X + b_1 Y + c_1 Z &= 0,\\ a_2 X + (b_2 - K)Y + c_2 Z &= 0,\\ a_3 X + b_3 Y + (c_3 - K)Z &= 0, \end{aligned}$$

al căror determinant este

$$D = \begin{vmatrix} a_1 - K & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 - K & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 - K \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - K^3 + K^2(a_1 + b_2 + c_3) -$$
$$- K\left[(a_1 b_2 - a_2 b_1) + (a_1 c_3 - a_3 c_1) + (b_2 c_3 - b_3 c_2)\right],$$
$$D = 1 - K^3 + K^2(a_1 + b_2 + c_3) - K(c_3 + b_2 + a_1),$$
$$D = (1 - K)\left[K^2 + K(a_1 + b_2 + c_3 - 1) + 1\right].$$

Pentru ca dreapta $O'\Delta$ să existe, trebue ca să putem găsi pentru (X, Y, Z) valori nu toate nule, deci determinantul D al sistemului (16) trebue să fie nul, iar valorile lui X, Y, Z sunt date în acest caz de primele două ecuații (16). Dar D se anulează pentru $K = 1$ și pentru rădăcinile ecuației

$$(17)\qquad K^2 + K(a_1 + b_2 + c_3 - 1) + 1 = 0.$$

Realizantul acestei ecuații în K este $R=(a_1+b_2+c_3-1)^2-4$. Înlocuind pe a_1, b_2, c_3 cu valorile lor (15), avem $R=(3\rho^2-\lambda^2-\mu^2-\nu^2-1)^2-4$. Cum $\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\rho^2=1$, urmează $R=(3\rho^2-1+\rho^2-1)^2-4=16\rho^2(\rho^2-1)=16\rho^2(-\lambda^2-\mu^2-\nu^2)=-16\rho^2(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)<0$. Deci ecuația (17) are rădăcini imaginare și prin urmare determinantul D se anulează numai pentru $K=1$. Înlocuind pe K cu 1, primele două ecuații (16) ne dau un singur sistem de valori proporționale pentru X, Y, Z, care corespund punctelor situate pe o dreaptă $O'\Delta$. Deci, în deplasarea (9) este o singură dreaptă care rămâne neschimbată.

Luând ca axă $O'Z'$ dreapta $O'\Delta$, iar ca axe $O'X'$, $O'Y'$ două drepte perpendiculare oarecare, deplasarea (9) este de forma

$$X'=X\cos\theta-Y\sin\theta,$$
$$Y'=X\sin\theta+Y\cos\theta,$$
$$Z'=Z,$$

care reprezintă o rotație de unghiul θ în jurul axei $O'Z'$. Se vede deci că orice deplasare care lasă neschimbat un punct din spațiu la distanță finită, este o rotație în jurul unei axe ce trece prin acest punct.

IV. Observând că deplasarea (7) este rezultatul unei translații și unei rotații în jurul unei axe, urmează că orice deplasare este rezultatul unei translații și unei rotații în jurul unei axe.

În rezumat, în Geometria metrică cu trei dimensiuni există un plan privilegiat, care este planul de la infinit; în acest plan sunt puncte particulare care joacă un rol special, și anume punctele circulare de la infinit ale tuturor dreptelor izotrope. Locul acestor puncte este cercul imaginar de la infinit. Vom vedea, în cele ce urmează, că, privind problema din punct de vedere proiectiv al raportului anarmonic, putem raporta la acest imaginar definițiile fundamentale ale unghiului și distanței; vom putea deci construi Geometrii neeuclidiene, înlocuind acest cerc cu altă conică la distanță finită sau infinită, în care caz vom lua în locul formei cuadratice

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2$$

o formă cuadratică oarecare de x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2.

25. DEPLASĂRILE ÎN GEOMETRIA EUCLIDIANĂ CLASICĂ CU PATRU DIMENSIUNI. I. Substituții ortogonale. $M_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$ fiind coordonatele a două puncte, deplasările care lasă neschimbată forma cuadratică

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2+(t_1-t_2)^2 \tag{18}$$

formează grupul deplasărilor ortogonale

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1+a_1X+b_1Y+c_1Z+d_1T,\\ y &= \alpha_2+a_2X+b_2Y+c_2Z+d_2T,\\ z &= \alpha_3+a_3X+b_3Y+c_3Z+d_3T,\\ t &= \alpha_4+a_4X+b_4Y+c_4Z+d_4T, \end{aligned} \tag{19}$$

coefficienții $\alpha_1, \ldots \alpha_4, a_1, a_2, \ldots d_4$ fiind constante care verifică relațiile

(20) $\Sigma a_i^2=1,\ \Sigma b_i^2=1,\ \Sigma c_i^2=1,\ \Sigma d_i^2=1,\ \Sigma a_i^2 = a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2,$

(21) $\Sigma a_i b_i=0,\ \Sigma a_i c_i=0,\ \Sigma a_i d_i=0,\ \Sigma b_i c_i=0,\ \Sigma b_i d_i=0,\ \Sigma c_i d_i=0,$

$$\Sigma a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4.$$

Deci suma pătratelor elementelor unei coloane a determinantului

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

este egală cu 1 și suma produselor elementelor a două coloane oarecare ale lui Δ este nulă, adică determinantul Δ este ortogonal.

Calculând Δ^2 și ținând seamă de relațiile (20), (21), se vede că

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

de unde $\Delta = \pm 1$. Ambele semne sunt posibile, căci dacă avem o substituție ortogonală pentru care $\Delta = 1$, se pot schimba semnele elementelor primei linii și substituția rămâne ortogonală, pe când Δ schimbă de semn. Vom lua $\Delta = 1$.

Efectuând translația $x = \alpha_1 + X',\ y = \alpha_2 + Y',\ z = \alpha_3 + Z',\ t = \alpha_4 + T'$, transformarea (19) se reduce la

$$\begin{aligned} X' &= a_1 X + b_1 Y + c_1 Z + d_1 T, \\ Y' &= a_2 X + b_2 Y + c_2 Z + d_2 T, \\ Z' &= a_3 X + b_3 Y + c_3 Z + d_3 T, \\ T' &= a_4 X + b_4 Y + c_4 Z + d_4 T, \end{aligned} \tag{22}$$

împreună cu relațiile (20) și (21). ste ecuații respectiv cu a_1, a_2, a_3, a_4, adunând și ținând seamă de (20) și (21), avem

$$X = a_1 X' + a_2 Y' + a_3 Z' + a_4 T'. \tag{23}$$

Rezolvând ecuațiile (22) în raport cu X, Y, Z, T, avem

$$X = \begin{vmatrix} X' & b_1 & c_1 & d_1 \\ Y' & b_2 & c_2 & d_2 \\ Z' & b_3 & c_3 & d_3 \\ T' & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix},$$

și dezvoltând după elementele primei coloane, se vede că coeficienții lui X', Y', Z', T' sunt minorii ce corespund în Δ la elementele coloanei întâi. Comparând această dezvoltare cu (23), identificând coeficienții lui X', Y', Z', T', se vede că

$$a_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}, \ldots \tag{24}$$

adică fiecare element al determinantului Δ este egal cu minorul corespunzător în dezvoltarea lui Δ, sau

$$a_1 = \frac{\partial \Delta}{\partial a_1}, \ldots$$

Înmulțind ecuațiile (22) respectiv cu a_1, a_2, a_3, a_4 și adunând; apoi cu b_1, b_2, b_3, b_4 și adunând, etc.; ținând seamă de (20) și (21), avem

$$(25)\quad \begin{aligned} X &= a_1X' + a_2Y' + a_3Z' + a_4T', \\ Y &= b_1X' + b_2Y' + b_3Z' + b_4T', \\ Z &= c_1X' + c_2Y' + c_3Z' + c_4T', \\ T &= d_1X' + d_2Y' + d_3Z' + d_4T', \end{aligned}$$

care se zice transformarea inversă a transformării ortogonale (22). Înlocuind în relația (18) și scriind că este un invariant, urmează

$$a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + d_i^2 = 1, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2 = 0, \quad a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 + d_2d_3 = 0,$$
$$a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 + d_1d_3 = 0, \quad a_2a_4 + b_2b_4 + c_2c_4 + d_2d_4 = 0,$$
$$a_1a_4 + b_1b_4 + c_1c_4 + d_1d_4 = 0, \quad a_3a_4 + b_3b_4 + c_3c_4 + d_3d_4 = 0,$$

care arată că și transformarea (25) este ortogonală.

Avem

$$(26)\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_3 & d_3 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix},$$

adică, în Δ, un determinant oarecare δ format din două linii și două coloane este egal cu determinantul ce se obține din Δ suprimând liniile și coloanele din care fac parte acelea ale primului determinant δ.

II. Distanțe. Unghiuri. Distanța a două puncte $M_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$ este dată de $\overline{M_1M_2}^2 = (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2 + (t_1-t_2)^2$.

Elementul linear este $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2$.

Ca și la spațiul cu trei dimensiuni, se arată că

$$(27)\quad 2\Sigma(x_1-x_2)(x_1-x_3) = \Sigma(x_1-x_3)^2 + \Sigma(x_1-x_2)^2 - \Sigma(x_2-x_3)^2,$$

deci este un invariant. Unghiul V al direcțiilor M_1M_2, M_1M_3 este dat de

$$\cos V = \frac{\Sigma(x_1-x_2)(x_1-x_3)}{\sqrt{\Sigma(x_1-x_2)^2}\sqrt{\Sigma(x_1-x_3)^2}},$$

care este un invariant. Deci, din invarianța distanțelor rezultă invarianța unghiurilor. Direcțiile M_1M_2, M_1M_3 sunt ortogonale, când

$$\Sigma(x_1-x_2)(x_1-x_3) = (x_1-x_2)(x_1-x_3) + (y_1-y_2)(y_1-y_3) + (z_1-z_2)(z_1-z_3) + (t_1-t_2)(t_1-t_3) = 0.$$

III. Drepte. Plane. Hiperplane. Se zice dreapta M_1M_2 locul punctelor ale căror coordonate sunt

$$(27)'\quad x = x_1 + \lambda(x_2-x_1),\ y = y_1 + \lambda(y_2-y_1),\ z = z_1 + \lambda(z_2-z_1),\ t = t_1 + \lambda(t_2-t_1),$$

λ fiind variabil. Aceste ecuații se pot scrie

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} = \frac{t-t_1}{t_2-t_1},$$

iar x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1, t_2-t_1 formează un sistem de parametrii directori ai dreptei. Axele de coordonate Ox, Oy, Oz, Ot sunt reprezentate respectiv de ecuațiile $y=z=t=0$, $t=x=z=0$,... Dreptele ai căror parametrii directori verifică relația

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2+(t_1-t_2)^2=0$$

se zic izotrope, sau drepte de lungime nulă.

Considerând trei puncte $M_i(x_i, y_i, z_i, t_i)$, $i=1,2,3$, planul $M_1M_2M_3$ este locul punctelor ale căror coordonate sunt

$$x=x_1+\lambda(x_2-x_1)+\mu(x_3-x_1),\ y=y_1+\lambda(y_2-y_1)+\mu(y_3-y_1),\ z=z_1+\lambda(z_2-z_1)+\mu(z_3-z_1),$$
$$t=t_1+\lambda(t_2-t_1)+\mu(t_3-t_1), \tag{28}$$

λ și μ fiind variabili. Ecuațiile planelor xOy, yOz, zOt, tOx sunt respectiv $z=t=0$, $t=x=0$, $x=y=0$, $y=z=0$.

Fiind date patru puncte $M_i(x_i, y_i, z_i, t_i)$, $i=1,2,3,4$, iperplanul $M_1M_2M_3M_4$ este locul punctelor care au coordonatele

$$x=x_1+\lambda(x_2-x_1)+\mu(x_3-x_1)+\nu(x_4-x_1),\ \dots, \tag{29}$$

λ, μ, ν fiind variabili. Eliminând pe λ, μ, ν între aceste ecuații, iperplanul $M_1M_2M_3M_4$ este reprezentat de o ecuație de forma

$$Ax+By+Cz+Dt+E=0. \tag{30}$$

Două ecuații de forma

$$Ax+By+Cz+Dt+E=0,\quad A'x+B'y+C'z+D't+E'=0, \tag{31}$$

ne dau în general valori pentru două din necunoscutele x, y, z, t în funcțiune de celelalte două, ca și ecuațiile (28) de unde se elimină λ și μ; deci ecuațiile (31) definesc un plan.

În mod analog, se arată că trei ecuații $A_ix+B_iy+C_iz+D_it+E_i=0$, $i=1,2,3$, definesc o dreaptă, analoagă cu (27)'.

Să considerăm dreapta definită de punctele $M_i(x_i, y_i, z_i, t_i)$, $i=1,2$. Locul punctelor $M(x, y, z, t)$, astfel ca dreapta M_1M să fie perpendiculară pe M_1M_2 este reprezentat de ecuația

$$(x_1-x_2)(x_1-x)+(y_1-y_2)(y_1-y)+(z_1-z_2)(z_1-z)+(t_1-t_2)(t_1-t)=0,$$

care fiind de forma (30), este un iperplan. Invers, fiind dat iperplanul definit de punctele $M_i(x_i, y_i, z_i, t_i)$, $i=1,2,3,4$, este o dreaptă M_1M ortogonală la acest iperplan, adică perpendiculară pe trei drepte M_1M_2, M_1M_3, M_1M_4 din plan; parametrii directori p, q, r, s ai acestei drepte verifică deci relațiile

$$p(x_1-x_i)+q(y_1-y_i)+r(z_1-z_i)+s(t_1-t_i)=0,\ i=1,2,3,$$

de unde se găsesc valorile pentru p, q, r, s proporționale cu determinanții de ordinul al treilea deduși din tabloul dreptunghiular

$$\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 & t_1-t_2 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 & z_1-z_3 & t_1-t_3 \\ x_1-x_4 & y_1-y_4 & z_1-z_4 & t_1-t_4 \end{vmatrix}.$$

Să considerăm punctele $M_i(x_i, y_i, z_i, t_i)$, $i=1,2,3,4$. O fiind originea coordonatelor, parametrii directori ai dreptelor OM_i sunt x_i, y_i, z_i, t_i. Să presupunem că dreptele OM_1 și OM_2 sunt perpendiculare pe OM_3 și OM_4; avem

(32) $x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3+t_1t_3=0,\quad x_1x_4+y_1y_4+z_1z_4+t_1t_4=0,$
$x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3+t_2t_3=0,\quad x_2x_4+y_2y_4+z_2z_4+t_2t_4=0.$

Un punct P al planului OM_1M_2 are coordonate de forma

$$0+\lambda(x_1-0)+\mu(x_2-0)=\lambda x_1+\mu x_2,\ \lambda y_1+\mu y_2,\ \lambda z_1+\mu z_2,\ \lambda t_1+\mu t_2.$$

alt punct Q al acestui plan are coordonatele

$$\lambda' x_1+\mu' x_2,\ \lambda' y_1+\mu' y_2,\ \lambda' z_1+\mu' z_2,\ \lambda' t_1+\mu' t_2.$$

Parametrii directori ai dreptei PQ oarecare din planul OM_1M_2 sunt

$$\lambda x_1+\mu x_2-(\lambda' x_1+\mu' x_2)=\alpha x_1+\beta x_2,\ \alpha y_1+\beta y_2,\ \alpha z_1+\beta z_2,\ \alpha t_1+\beta t_2,$$

α,β fiind variabili. De asemenea, parametrii directori ai unei drepte RS din planul OM_3M_4 sunt

$$\gamma x_3+\delta x_4,\ \gamma y_3+\delta y_4,\ \gamma z_3+\delta z_4,\ \gamma t_3+\delta t_4,$$

γ,δ fiind oarecare. Dar, între parametrii directori ai dreptelor PQ, RS avem relația

$$(\alpha x_1+\beta x_2)(\gamma x_3+\delta x_4)+(\alpha y_1+\beta y_2)(\gamma y_3+\delta y_4)+\cdots,$$

care este egală cu zero în virtutea relațiilor (32), astfel că dreptele PQ, RS sunt perpendiculare. Deci, dacă dreptele OM_1, OM_2 sunt perpendiculare pe dreptele OM_3, OM_4, atunci orice dreaptă din planul OM_1M_2 este perpendiculară pe orice dreaptă din planul OM_3M_4. În acest caz planele OM_1M_2, OM_3M_4 se zic complect perpendiculare. Se vede că planul OM_3M_4 este comun iperplanelor perpendiculare respectiv pe dreptele OM_1, OM_2.

IV. Punctul invariabil al deplasării (19), adică acela care coincide cu omologul său în această transformare, este dat de ecuațiile

(33)
$$\begin{aligned}(a_1-1)X+b_1Y+c_1Z+d_1T+\alpha_1&=0,\\ a_2X+(b_2-1)Y+c_2Z+d_2T+\alpha_2&=0,\\ a_3X+b_3Y+(c_3-1)Z+d_3T+\alpha_3&=0,\\ a_4X+b_4Y+c_4Z+(d_4-1)T+\alpha_4&=0.\end{aligned}$$

Determinantul

$$D=\begin{vmatrix} a_1-1 & b_1 & c_1 & d_1\\ a_2 & b_2-1 & c_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & c_3-1 & d_3\\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4-1\end{vmatrix}$$

al sistemului (33) este în general diferit de zero. Există deci în general un punct invariabil în această deplasare. Vedem deci că în Geometria cu patru dimensiuni, ca și în Geometria plană, există un asemenea punct, ceea ce n'a avut loc în spațiul cu trei dimensiuni, astfel că existența punctului invariabil depinde de paritatea numărului de dimensiuni.

Deplasând axele în punctul $O'(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$, formulele (19) nu mai au termeni constanți și devin

(34)
$$\begin{aligned}X'&=a_1X+b_1Y+c_1Z+d_1T,\\ Y'&=a_2X+b_2Y+c_2Z+d_2T,\\ Z'&=a_3X+b_3Y+c_3Z+d_3T,\\ T'&=a_4X+b_4Y+c_4Z+d_4T.\end{aligned}$$

și reprezintă o deplasare cu jurul punctului fix O'.

V. Drepte invariabile în deplasarea cu jurul unui punct fix. Să căutăm mai întâi dacă există o dreaptă $O'\Delta$ de parametrii directori X, Y, Z, T, care să rămâe invariabilă în deplasarea (34), adică astfel ca transformatul (X', Y', Z', T') al punctului $M(X, Y, Z, T)$ în transformarea (34) să fie pe dreapta $O'M$. Va trebui deci să avem

$$\frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y} = \frac{Z'}{Z} = \frac{T'}{T} = \rho. \tag{35}$$

Înlocuind pe X', Y', Z', T', în ecuațiile (34), parametrii X, Y, Z, T sunt dați de ecuațiile

$$\begin{aligned} (a_1-\rho)X + b_1 Y + c_1 Z + d_1 T &= 0, \\ a_2 X + (b_2-\rho)Y + c_2 Z + d_2 T &= 0, \\ a_3 X + b_3 Y + (c_3-\rho)Z + d_3 T &= 0, \\ a_4 X + b_4 Y + c_4 Z + (d_4-\rho)T &= 0, \end{aligned} \tag{36}$$

al căror determinant este

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1-\rho & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2-\rho & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3-\rho & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4-\rho \end{vmatrix}.$$

Ca sistemul (36) să aibă soluții nu toate nule pentru X, Y, Z, T, trebue ca $\delta = 0$. Servindu-ne de relațiile (20), (21), (24), (26), ecuația $\delta = 0$ devine

$$\rho^4 + 1 - (a_1 + b_2 + c_3 + d_4)(\rho^3 + \rho) + \rho^2 \Sigma(a_1 b_2 - b_1 a_2) = 0. \tag{37}$$

Această ecuație reciprocă de gradul al patrulea în ρ nu poate admite rădăcina 1, sau -1, căci ar trebui să aibă o rădăcină dublă, ceea ce ar presupune relații particulare între cosinusurile directoare $a_1, \ldots d_4$.

Din relațiile (35) rezultă

$$X' = \rho X, \quad Y' = \rho Y, \quad Z' = \rho Z, \quad T' = \rho T, \tag{38}$$

de unde

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 + T'^2 = \rho^2 (X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2).$$

Dar, ρ fiind o rădăcină a ecuației (37), iar punctele (X, Y, Z, T), (X', Y', Z', T') fiind corespunzătoare în această deplasare, conform definiției acestei deplasări, avem

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 = X'^2 + Y'^2 + Z'^2 + T'^2,$$

deci

$$(1-\rho^2)(X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2) = 0.$$

Cum $\rho^2 \neq 1$, urmează că parametrii directori X, Y, Z, T ai dreptei $O'\Delta$ verifică relația

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 = 0,$$

adică este o dreaptă izotropă, iar unele din cantitățile X, Y, Z, T au valori imaginare. Rezultă că ρ este imaginar, căci dacă ar fi real, sistemul (36) nu ar putea da valori imaginare pentru X, Y, Z, T.

Ecuația (37) are deci rădăcini imaginare. Coeficienții ecuației fiind reali, aceste rădăcini sunt conjugate două câte două; mai mult, ecuația fiind reciprocă, două rădăcini conjugate sunt inverse una alteia, ceea ce arată că toate rădăcinile au modulele egale cu 1. Fie $\rho_1, \rho_2; \rho_3, \rho_4$ aceste patru rădăcini. Însemnând cu X_1, Y_1, Z_1, T_1 și X_3, Y_3, Z_3, T_3 soluțiile sistemului (36) corespunzătoare lui $\rho = \rho_1, \rho = \rho_3$,

avem din (38)

$$(39)\qquad X_1'X_3' + Y_1'Y_3' + Z_1'Z_3' + T_1'T_3' = \varphi_1\varphi_3(X_1X_3 + Y_1Y_3 + Z_1Z_3 + T_1T_3).$$

Cum, din (27), $X_1X_3 + Y_1Y_3 + Z_1Z_3 + T_1T_3$ este un invariant pentru deplasare, urmează $X_1X_3 + Y_1Y_3 + Z_1Z_3 + T_1T_3 = X_1'X_3' + Y_1'Y_3' + Z_1'Z_3' + T_1'T_3'$, așa că relația (39) devine

$$(1-\varphi_1\varphi_3)(X_1X_3 + Y_1Y_3 + Z_1Z_3 + T_1T_3) = 0.$$

Cum $1-\varphi_1\varphi_3 \neq 0$, căci $\varphi_1\varphi_2 = 1$, $\varphi_3\varphi_4 = 1$ și 1 nu este rădăcină dublă, urmează că

$$X_1X_3 + Y_1Y_3 + Z_1Z_3 + T_1T_3 = 0,$$

ceea ce probează că direcțiile (X_1, Y_1, Z_1, T_1), (X_3, Y_3, Z_3, T_3) sunt perpendiculare.

Deci, în deplasarea considerată rămân invariabile patru drepte $O'\Delta_1, O'\Delta_2, O'\Delta_3, O'\Delta_4$, care sunt imaginar conjugate două câte două. Dreptele $O'\Delta_1, O'\Delta_2$ sunt ambele perpendiculare pe dreptele $O'\Delta_3, O'\Delta_4$. Deci planele $O'\Delta_1\Delta_2$, $O'\Delta_3\Delta_4$, care sunt reale, sunt complect perpendiculare. Aceste plane alunecă dealungul lor în această deplasare. Deplasarea (34) se compune deci din două rotații simple efectuate în două plane complect perpendiculare. Să alegem în planul $O'\Delta_1\Delta_2$ două axe perpendiculare $O'\xi$, $O'\eta$ și în planul $O'\Delta_3\Delta_4$ două axe perpendiculare $O'\zeta$, $O'\chi$. Se pot lua pentru axele de coordonate sistemul de axe $O'\xi$, $O'\eta$, $O'\zeta$, $O'\chi$, iar formulele (34) vor fi înlocuite cu

$$\begin{aligned}
\xi' &= \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi,\\
\eta' &= \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi,\\
\zeta' &= \zeta\cos\theta - \chi\sin\theta,\\
\chi' &= \zeta\sin\theta + \chi\cos\theta.
\end{aligned}$$

Ecuația (37) devine în acest caz[1]

$$(\rho^2 - 2\rho\cos\varphi + 1)(\rho^2 - 2\rho\cos\theta + 1) = 0.$$

26. GEOMETRIA EUCLIDIANĂ IPERBOLICĂ CU DOUĂ DIMENSIUNI. I.

Această Geometrie este studiul transformărilor proiective care lasă neschimbate punctele P și Q de la infinit a două drepte perpendiculare Ox, Oy, și pentru care rotațiile mai au proprietatea că fac să alunece asupra lor conicele (H) cu centrul în centrul de rotație și trecând prin P și Q.

O translație în sensul Geometriei clasice lasă neschimbat fiecare punct de la infinit. Deci, conform definiției noastre, translațiile fac parte din grupul deplasărilor pe care le considerăm. Deci, în privința translației, și prin urmare, în privința paralelelor, nu este nici o deosebire între Geometria euclidiană iperbolică și cea clasică.

O rotație în jurul punctului O este o transformare proiectivă dată de ecuațiile

$$(40)\qquad x = \alpha X + \beta Y,\quad y = \alpha' X + \beta' Y.$$

Dacă $(x, y), (X, Y)$ sunt două puncte corespunzătoare, coeficienții unghiulari ai dreptelor δ' și δ ce unesc originea cu aceste puncte sunt $m' = \frac{y}{x}$, $m = \frac{Y}{X}$.

---

[1] Pentru mai multe detalii, a se vedea, Borel, Introduction géométrique à quelques théories physiques, p. 23.

Din (40), avem $\frac{\eta}{\xi} = \frac{\alpha' + \beta' \frac{Y}{X}}{\alpha + \beta \frac{Y}{X}}$, $m' = \frac{\alpha' + \beta' m}{\alpha + \beta m}$.

O dreaptă δ este lasată invariabilă de această transformare când coincide cu δ', adică sunt acele drepte pentru care $m = m'$, ele sunt date de ecuația

(41) $m = \frac{\alpha' + \beta' m}{\alpha + \beta m}$, $\beta m^2 + (\alpha - \beta') m - \alpha' = 0$

Punctele de la infinit P și Q ale axelor Ox, Oy fiind invariabile, se vede că dreptele care rămân invariabile sunt Ox și Oy, ai căror coeficienți unghiulari sunt 0 și ∞. Exprimând că ecuația (41) are aceste rădăcini, urmează $\alpha' = 0$, $\beta = 0$. Transformarea (40) este deci de forma

$$x = \alpha X, \quad y = \beta' Y.$$

Dar, conicele (H) cu centrul în O și trecând prin P și Q sunt iperbolele $xy = K$. Cum aceste conice trebue să alunece asupra lor în această rotație, urmează $xy = XY = K$, deci $\alpha\beta' = 1$. Deci rotațiile iperbolice sunt reprezentate de ecuațiile

(42) $x = \lambda X, \quad y = \frac{Y}{\lambda}$.

Vom considera numai cazul λ pozitiv și anume figurile situate în unghiul xOy, sau în unghiul opus la vârf.

Grupul deplasărilor în această Geometrie iperbolică care cuprind translațiile și rotațiile în jurul unui punct este dat de formulele

(43) $x = a + \lambda X, \quad y = b + \frac{Y}{\lambda}$,

care depinde ca și cel euclidian clasic de trei parametrii a, b, λ.

II. Considerând punctele $m_1(x_1, y_1)$, $m_2(x_2, y_2)$ și corespunzătoarele lor cu această transformare, (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), se vede că avem

(44) $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) = (X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2)$.

Așa dar, în această Geometrie, forma cuadratică invariantă este

(45) $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)$.

Deci, dacă segmentele $m_1 m_2$ și $M_1 M_2$ sunt astfel în cât să avem relația (44), putem să aducem cu deplasarea (43) segmentul $m_1 m_2$ peste $M_1 M_2$. Cantitatea

(46) $M_1 M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)}$

se zice în această Geometrie distanța punctelor (x_1, y_1), (x_2, y_2).

Locul punctelor (x, y) la unitatea de distanță de originea O este iperbola $xy = 1$. Dacă punctul $M(x, y)$ este pe una din dreptele Ox sau Oy, avem $OM = 0$. De asemenea, distanța în sensul acestei geometrii, dată de formula (46), a două puncte oarecare ale unei paralele la Ox sau Oy, este nulă. Deci, paralelele la Ox și Oy sunt drepte de lungime nulă; aceste drepte înlocuesc dreptele izotrope din Geometria clasică.

III. Să considerăm două puncte $M(x, y)$, $M'(x', y')$; distanța lor este dată de

$$\overline{MM'}^2 = (x - x')(y - y'),$$

care este un invariant. Dar

(47) $\overline{MM'}^2 = xy + x'y' - (xy' + x'y)$, $\overline{MM'}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{OM'}^2 - (xy' + x'y)$,

și cum MM', OM, OM' sunt invarianți, urmează că și $xy' + x'y$ este un invariant.

Pentru a da o interpretare acestui invariant, să considerăm raportul anarmonic

$$\rho = R(OM', OM, Ox, Oy).$$

Înmulțind cu $m = \frac{y}{x}$, $m' = \frac{y'}{x'}$ coeficienții unghiulari ai dreptelor OM, OM', avem

$$\rho = \frac{m'}{m} = \frac{yx'}{xy'}.$$

Numind unghiul direcțiilor OM', OM cantitatea $V = \frac{1}{2}\log\rho$, avem

$$\sqrt{\rho} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} = e^V + \bar{e}^V = 2chV,$$

și deci

$$\frac{\rho+1}{\sqrt{\rho}} = 2chV, \quad \frac{\frac{m'}{m}+1}{\sqrt{\frac{m'}{m}}} = 2chV, \quad \frac{m'+m}{\sqrt{mm'}} = 2chV, \quad \frac{yx'+xy'}{\sqrt{xyx'y'}} = 2chV,$$

$$xy' + yx' = 2\sqrt{xyx'y'}\,chV, \quad xy' + yx' = 2OM.OM'chV, \tag{48}$$

iar relația (47) devine

$$\overline{MM'}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{OM'}^2 - 2OM.OM'chV,$$

care este o relație fundamentală în Geometria iperbolică considerată. Unghiul a două drepte este dat de relația (48).

Am văzut că

$$2chV = \frac{m+m'}{\sqrt{mm'}}, \quad 2chV = e^V + \bar{e}^V.$$

Dacă V este egal cu $i\frac{\pi}{2}$, avem

$$chV = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}} + \bar{e}^{i\frac{\pi}{2}}}{2} = \cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad m + m' = 0.$$

Se zice în acest caz că dreptele OM, OM' de coeficienți unghiulari m și m' sunt perpendiculare. De ex., tangenta MT la iperbola $xy = 1$ este perpendiculară pe dreapta OM (Fig. 6).

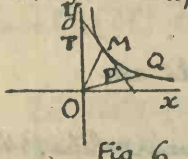

Fig. 6.

Să considerăm un punct pe iperbola $xy = 1$, fie P (Fig. 6) un punct pe tangenta în M și Q punctul unde OP taie iperbola; avem $\overline{OM} = \overline{OQ} = 1$, $\overline{OP} < \overline{OQ}$, ceea ce arată că în Geometria iperbolică perpendiculara este mai lungă de cât orice oblică.

Pentru a preciza acest rezultat, să însemnăm în general cu $(x, y), (x', y')$ coordonatele punctelor M și P, astfel ca OM și OP să fie perpendiculare; coeficienții unghiulari ai dreptelor OM și MP sunt $m = \frac{y}{x}$, $m' = \frac{y-y'}{x-x'}$. Fiind perpendiculare, avem $m + m' = 0$,

$$\frac{y}{x} + \frac{y-y'}{x-x'} = 0,$$

de unde

$$x'y' = xy + (x-x')(y-y'),$$

și presupunând M și P în unghiul xOy, avem

$$\overline{OP}^2 = \overline{OM}^2 + (x-x')(y-y'). \tag{49}$$

Dar, observând mărimea coordonatelor x, y, x', y', se vede că $(x-x')(y-y')$ este negativă și atunci, conform definiției noastre, distanța MP nu este reală. Însemnând cu simbolul MP cantitatea

$$\sqrt{|(x-x')(y-y')|} = i\sqrt{(x-x')(y-y')},$$

relația (49) devine $\overline{OP}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{MP}^2$, care este în Geometria iperbolică specială

considerată teorema analoagă acelei lui Pitagora.

IV. Aria unui domeniu D este integrala $\iint dx\,dy$, care nu este schimbată prin deplasarea considerată observând relația (44). Să calculăm, de ex., aria triunghiului OMM', punctele M și M' fiind în unghiul xOy, pe curba $xy=1$. Notând cu (x,y), (x',y') coordonatele acestor puncte, și $m=\frac{y}{x}$, $m'=\frac{y'}{x'}$ coeficienții unghiulari ai dreptelor OM, OM', expresia ariei triunghiului OMM' dată în Geometria analitică este

$$2S = xy' - x'y = \frac{m-m'}{\sqrt{mm'}}.$$

Observând că $\frac{m+m'}{2\sqrt{mm'}} = chV$, $ch^2V - sh^2V = 1$, urmează că

$$2S = shV.$$

Se găsește în general că aria triunghiului OMM' este $\frac{1}{2}OM.OM'shV$.

V. Dacă luăm ca axe de coordonate axele iperbolelor (H), adică bisectoarele axelor de coordonate considerate mai sus, însemnând cu x', y' coordonatele cele noi, avem

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y),\quad y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)$$

și atunci distanța de la punctul $M(x,y)$ la centru este dată de formula

$$2\overline{OM}^2 = 2xy = x'^2 - y'^2.$$

Punând $\lambda = e^{\varphi}$, formulele (42) devin

$$x' = X'ch\varphi + Y'sh\varphi,$$
$$y' = X'sh\varphi + Y'ch\varphi,$$

de unde se deduce

$$x'^2 - y'^2 = X'^2 - Y'^2. \tag{50}$$

Am fi putut pleca de la formula (50), luând ca formă cuadratică invariantă $(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2$. Raționând ca în cazul deplasărilor în spațiul cu trei dimensiuni, se obține pentru formulele deplasării

$$x' = a + X'ch\varphi + Y'sh\varphi,\quad y' = b + X'sh\varphi + Y'ch\varphi.$$

27. GEOMETRIA PSEUDO-EUCLIDIANĂ IPERBOLICĂ CU TREI ȘI PATRU DIMENSIUNI. În spațiul cu trei dimensiuni, deplasările iperbolice sunt acelea care lasă neschimbată forma cuadratică

$$F = (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 - (z_1-z_2)^2.$$

Distanța a două puncte $M_i(x_i,y_i,z_i,t_i)$, $i=1,2$, este rădăcina pătrată a modulului formei cuadratice F.

Printr'un raționament analog ca la spațiul euclidian cu trei dimensiuni, se vede că aceste deplasări sunt date de formulele

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 + a_1X + b_1Y + c_1Z,\\ y &= \alpha_2 + a_2X + b_2Y + c_2Z,\\ z &= \alpha_3 + a_3X + b_3Y + c_3Z, \end{aligned} \tag{51}$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sunt trei constante date, iar elementele determinantului

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

verifică relaţiile independente

$$(52)\quad \begin{aligned} &a_1^2+a_2^2-a_3^2=1, \quad && a_1b_1+a_2b_2-a_3b_3=0,\\ &b_1^2+b_2^2-b_3^2=1, && b_1c_1+b_2c_2-b_3c_3=0,\\ &c_1^2+c_2^2-c_3^2=-1, && c_1a_1+c_2a_2-c_3a_3=0. \end{aligned}$$

Înlocuind în Δ şi (52) pe a_3, b_3, c_3 cu ia_3', ib_3', ic_3', avem

$$\Delta=i\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3' & b_3' & c_3' \end{vmatrix},\quad \begin{aligned} &a_1^2+a_2^2+a_3'^2=1, && a_1b_1+a_2b_2+a_3'b_3'=0,\\ &b_1^2+b_2^2+b_3'^2=1, && b_1c_1+b_2c_2+b_3'c_3'=0,\\ &c_1^2+c_2^2+c_3'^2=1, && c_1a_1+c_2a_2+c_3'a_3'=0, \end{aligned}$$

relaţii care arată că

$$\Delta^2=-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3' & b_3' & c_3' \end{vmatrix}^2=-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=1.$$

Formulele lui d' Olinde Rodrigues sunt în acest caz

$$\begin{aligned} &\delta a_1=\lambda^2+\mu^2+\nu^2-\rho^2, \ \delta a_2=2(\lambda\mu-\nu\rho), \ \delta a_3=2(\lambda\nu-\mu\rho),\\ &\delta b_1=2(\lambda\mu+\nu\rho), \ \delta b_2=-\lambda^2+\mu^2+\nu^2-\rho^2, \ \delta b_3=2(\lambda\rho+\mu\nu),\\ &\delta c_1=-2(\lambda\nu+\mu\rho), \ \delta c_2=2(\lambda\rho-\mu\nu), \ \delta c_3=-(\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\rho^2),\\ &\delta=\lambda^2+\mu^2-\rho^2-\nu^2. \end{aligned}$$

Aceste deplasări se reduc la translaţii şi rotaţii în jurul unei axe fixe care rămâne invariabilă în transformarea

$$\begin{aligned} X'&=a_1X+b_1Y+c_1Z,\\ Y'&=a_2X+b_2Y+c_2Z,\\ Z'&=a_3X+b_3Y+c_3Z. \end{aligned}$$

În Geometria pseudo-euclidiană iperbolică cu patru dimensiuni, se studiază deplasările care lasă neschimbată forma cuadratică

$$F=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2-(t_1-t_2)^2,$$

iar distanţa a două punte M_1, M_2 este rădăcina pătrată a modulului formei F.

Expresia generală a acestor deplasări este

$$\begin{aligned} x&=\alpha_1+a_1X+b_1Y+c_1Z+d_1T,\\ y&=\alpha_2+a_2X+b_2Y+c_2Z+d_2T,\\ z&=\alpha_3+a_3X+b_3Y+c_3Z+d_3T,\\ t&=\alpha_4+a_4X+b_4Y+c_4Z+d_4T, \end{aligned}$$

unde elementele determinantului

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3\\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

verifică relaţiile în număr de zece,

$$\begin{aligned} &a_1^2+a_2^2+a_3^2-a_4^2=1,\\ &b_1^2+b_2^2+b_3^2-b_4^2=1,\\ &c_1^2+c_2^2+c_3^2-c_4^2=1,\\ &d_1^2+d_2^2+d_3^2-d_4^2=-1,\\ &a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3-a_4b_4=0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Ca și în Geometria euclidiană clasică cu trei dimensiuni, se arată că

$$2[(x_1-x_2)(x_1-x_3)+(y_1-y_2)(y_1-y_3)+(z_1-z_2)(z_1-z_3)-(t_1-t_2)(t_1-t_3)]=\overline{M_1M_3}^2+\overline{M_1M_2}^2-\overline{M_2M_3}^2,$$

și deci este un invariant. Înseamnă cu V unghiul direcțiilor M_1M_2, M_1M_3, se notează cu

$$(x_1-x_2)(x_1-x_3)+(y_1-y_2)(y_1-y_3)+(z_1-z_2)(z_1-z_3)-(t_1-t_2)(t_1-t_3)=M_1M_2\cdot M_1M_3\,\mathrm{ch}\,V,$$

de unde

$$\mathrm{ch}\,V=\frac{(x_1-x_2)(x_1-x_3)+(y_1-y_2)(y_1-y_3)+(z_1-z_2)(z_1-z_3)-(t_1-t_2)(t_1-t_3)}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2-(t_1-t_2)^2}\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2+(z_1-z_3)^2-(t_1-t_3)^2}},$$

iar relația de mai sus devine

$$\overline{M_2M_3}^2=\overline{M_1M_2}^2+\overline{M_1M_3}^2-2M_1M_2\cdot M_1M_3\,\mathrm{ch}\,V.$$

Dreptele M_1M_2, M_1M_3 sunt perpendiculare când $V=i\frac{\pi}{2}$, adică $\mathrm{ch}\,V=0$, deci

$$(x_1-x_2)(x_1-x_3)+(y_1-y_2)(y_1-y_3)+(z_1-z_2)(z_1-z_3)-(t_1-t_2)(t_1-t_3)=0.$$

În mod analog, ca în Geometria obișnuită, se arată că aceste deplasări se reduc la două rotații, una euclidiană, cealaltă (parbolică), efectuate în două plane complect perpendiculare (cuvântul perpendicular fiind luat în sensul unghiurilor definite de forma cuadratică F). Studiul acestor deplasări corespunde întrun caz particular la spațiul lui Minkowski-Einstein în Relativitatea restrânsă.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Geometria neeuclidiană. Geometria Cayleyană.

Definiții metrice.

28. ORIGINA GEOMETRIEI CAYLEYENE. Din cele studiate asupra Geometriei sferice și Geometriei plane, am văzut că, pe când în Geometria sferică noțiunile de unghi și de distanță sunt în strânsă legătură cu raportul anarmonic, pare că în Geometria plană aceste noțiuni de unghi și de distanță sunt separate și nu pot avea o origină comună. În cele ce urmează vom expune principiile generale ale Geometriei Cayleyene, datorită marelui geometru englez Cayley, în care noțiunile metrice sunt obținute printr'un procedeu uniform.

Pentru aceasta, să proiectăm din centrul O al unei sfere diferitele puncte ale sale pe un plan (P). Cercurile mari ale sferei se vor proiecta după linii drepte ale planului (P); conul izotrop cu vârful O și ca bază cercul de la infinit, va tăia planul (P) după un cerc imaginar (C). Arcul de cerc mare, care unește două puncte M și M' ale sferei, este egal, după relația lui Laguerre, cu

$$\text{arc } MM' = \frac{1}{2i} \log R(OM', OM, OI, OJ),$$

I și J fiind punctele unde cercul mare MM' al sferei taie cercul de la infinit. Punctele M, M' se proiectează după punctele m, m' ale planului (P), cercul mare MM' după dreapta mm', și cele două puncte I și J se proiectează după punctele i și j, unde dreapta mm' taie cercul imaginar (C). Aplicând proprietatea proiectivității raportului anarmonic, avem

$$\text{arc } MM' = \frac{1}{2i} \log R(m', m, i, j).$$

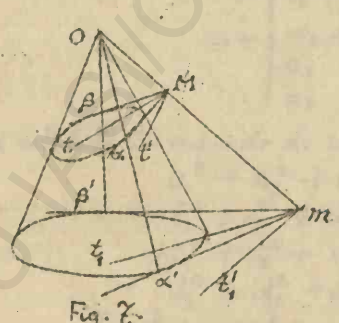

Fig. 7.

Pentru a găsi unghiul V a două arce de curbă trase pe sferă care se taie în M, și având ca tangente Mt, Mt', să stabilim mai întâi o proprietate a generatoarelor rectilinii ale sferei. Să presupunem că am luat centrul O al sferei ca origină și axă Oz dreapta OM. Planul tangent (T) în M la sferă are ecuația $z=1$ și taie sfera $x^2+y^2+z^2=1$ după dreptele izotrope $x^2+y^2=0$ ale planului tangent (T) ce trec prin punctul (0,0,1). Aceste drepte sunt cele două

generatoare rectilinii α și β ale sferei ce trec prin M (Fig. 7). Intersecția cu planul (T) a conului izotrop $x^2+y^2+z^2=0$ cu vârful O este cercul imaginar $x^2+y^2+1=0$. Tangentele duse din punctul (x_1, y_1) la acest cerc se obține înlocuind în ecuația acestui cerc x și y cu $\frac{x_1+\lambda x}{1+\lambda}$, $\frac{y_1+\lambda y}{1+\lambda}$ și scriind că ecuația în λ,

$$\left(\frac{x_1+\lambda x}{1+\lambda}\right)^2+\left(\frac{y_1+\lambda y}{1+\lambda}\right)^2+1=0,\ (x^2+y^2+1)\lambda^2+2(x_1x+y_1y+1)\lambda+(x_1^2+y_1^2+1)=0,$$

are o rădăcină dublă, astfel că ecuația tangentelor din (x_1,y_1) la cercul $x^2+y^2+1=0$ este $(x_1^2+y_1^2+1)(x^2+y^2+1)-(x_1x+y_1y+1)^2=0$. Deci, ecuația tangentelor din $M(0,0)$ la cercul $x^2+y^2+1=0$ este

$$(x^2+y^2+1)-1=0,\quad x^2+y^2=0,$$

adică dreptele izotrope $x^2+y^2=0$, generatoarele rectilinii ale sferei ce trec prin M. Așa dar, generatoarele rectilinii într'un punct M al sferei sunt cele două drepte izotrope din planul tangent (T') în M la sferă ce trec prin M, și sunt tangentele din M la conul izotrop situate în planul tangent (T).

Așa fiind, unghiul curbelor trase pe sferă ce trec prin M, este dat de unghiul V al tangentelor Mt și Mt' în M la aceste curbe, care sunt situate în planul tangent (T) în M. Aplicând relația lui Laguerre pentru planul (T) și fascicolul format de Mt, Mt', și dreptele izotrope ce trec prin M, α și β, adică generatoarele rectilinii ale sferei în M, avem

$$V=\frac{1}{2i}\log R(Mt', Mt, \alpha, \beta).$$

Proectând din centrul O figura pe planul (P) (Fig. 7), punctul M vine în m, generatoarele α și β se proiectează după tangentele α', β' duse din m la cercul (C), tangentele Mt și Mt' după tangentele mt_1, mt_1', la curbele plane care sunt proiecțiile curbelor sferice. Însă se știe că raportul anarmonic al dreptelor de intersecție a unui plan cu un fascicol de patru plane este constant și este egal cu raportul anarmonic al fascicolului de plane, deci $R(Mt', Mt, \alpha, \beta)=R(mt_1', mt_1, \alpha', \beta')$ și deci

$$V=\frac{1}{2i}\log R(mt_1', mt_1, \alpha', \beta').$$

Se vede, prin urmare, că dacă se consideră o Geometrie a relațiunilor metrice în plan, introducând un cerc imaginar (C) pe care să-l numim absolut, luând pentru distanța a două puncte câtul prin $2i$ al logaritmului raportului anarmonic format de cele două puncte și acelea unde dreapta care le unește întâlnește cercul (C) și pentru unghiul a două curbe, câtul prin $2i$ al logaritmului raportului anarmonic al tangentelor la aceste două curbe în punctul lor comun și celor două tangente care se pot duce din acest punct la cercul (C), vom avea, în plan, o Geometrie care va fi echivalentul Geometriei sferice și mai ales, care ar putea să cuprindă ca un caz limită Geometria clasică plană, căci se știe că Geometria sferei se reduce la aceea a planului, când raza sferei crește nemărginit.

Aceste rezultate bazându-se numai pe întrebuințarea raportului anarmo-

nic, subsistă, din această cauză, când se face o transformare omografică, astfel că se poate substitui cercului (C) o conică oarecare. Tot aceste rezultate ne vor face să înțelegem cum Cayley a fost condus la noua sa Geometrie.

Să considerăm mai întâi pe o dreaptă două puncte fixe A și B și două puncte variabile M și M', poziția punctului M depinzând de parametrul m. Raportul anarmonic al punctelor M, M', A și B este

$$\mathcal{R}(M, M', A, B) = \frac{m-a}{m-b} : \frac{m'-a}{m'-b},$$

m, m', a, b fiind valorile parametrului m care corespund respectiv punctelor M, M', A, B.

Punând

$$\frac{m-a}{m-b} = \varphi(m) \tag{1}$$

raportul anarmonic se scrie

$$\mathcal{R}(M, M', A, B) = \frac{\varphi(m)}{\varphi(m')},$$

de unde rezultă identitatea

$$\mathcal{R}(M, M', A, B)\mathcal{R}(M', M'', A, B)\mathcal{R}(M'', M, A, B) = 1. \tag{2}$$

Întrebuințând notația

$$\delta(MM') = \frac{1}{C}\log\mathcal{R}(M', M, A, B), \quad C = \text{const.}, \tag{3}$$

identitatea (2) devine

$$\delta(MM') + \delta(M'M'') + \delta(M''M) = 0. \tag{4}$$

Însă aceasta este relația caracteristică între abscisele a trei puncte în linie dreaptă, de unde urmează că este natural a numi distanța punctelor M și M' funcțiunea δ determinată de relația (3). Această distanță va fi deci definită de această formulă, îndată ce s'au dat punctele A și B, care servesc de bază sau absolut.

După proprietățile logaritmilor, această cătime este determinată afară de un multiplu de $2\pi i$; schimbă de semn, fără a-și schimba valoarea, când se schimbă M cu M', sau A cu B.

Dacă cele două puncte A și B sunt reale, se pot prezenta două cazuri. Sau unul din punctele M, M' este interior și celălalt exterior segmentului AB și atunci raportul anarmonic este negativ și oricare ar fi valoarea constantei C $\delta(MM')$ este imaginar, sau, ambele puncte M și M' interioare sau exterioare segmentului AB și atunci constanta C poate lua o valoare oarecare reală. Deci, în cazul când A și B sunt reale, avem o Geometrie interesantă când se consideră, sau numai punctele dintre A și B, sau numai puncte în afară de segmentul AB.

Să presupunem acum că cele două puncte A și B sunt imaginar conjugate, iar M și M' reale. Dacă se schimbă i în $-i$, punctul A se înlocuește cu B și B cu A, iar raportul anarmonic este înlocuit cu inversul său. Aceasta nu poate să aibă loc de cât dacă modulul său este egal cu 1. Logaritmul va fi atunci o cantitate pur imaginară, de forma Ki. Vom lua $C = \frac{2i}{R}$, pentru a da lui $\delta(MM')$ perioada πR și atunci vom avea

$$e^{\frac{2i}{R}\delta(MM')} = R(M', M, A, B).$$

Definițiile precedente se aplică de asemenea la planele care trec printr-o dreaptă fixă, sau la dreptele unui plan care trec printr-un punct fix. În primul caz, va fi dat de două plane fixe ce conțin dreapta, iar în al doilea, de două drepte fixe ce conțin punctul. Avem, în ambele cazuri,

$$\text{unghiul}(\mu\mu') = \frac{1}{C}\log R(\mu', \mu, \alpha, \beta),$$

α și β fiind parametrii ficși, care determină baza, iar μ, μ' acela care determină planele sau dreptele.

29. DISTANȚA A DOUĂ PUNCTE. UNGHIUL A DOUĂ PLANE SAU DOUĂ DREPTE. I. Acestea fiind stabilite, se poate construi o Geometrie metrică, introducând o conică în plan, sau o cuadrică în spațiu. Vom considera numai cazul spațiului, care cuprinde planul ca un caz particular.

Fiind dată o cuadrică, pe care o vom numi absolut, pentru a măsura distanța a două puncte M, M', vom lua ca bază punctele A și B unde dreapta MM' întâlnește absolutul. Avem

$$MM' = \frac{1}{C}\log R(M', M, A, B). \tag{5}$$

Pentru a determina unghiul a două plane μ, μ', vom lua baza formată de cele două plane α și β care trec prin intersecția lor și sunt tangente la absolut. Avem

$$\widehat{\mu\mu'} = \frac{1}{C'}\log R(\mu', \mu, \alpha, \beta). \tag{6}$$

Pentru a determina unghiul a două drepte care se taie, d și d', vom lua baza formată de cele două tangente a și b la absolut, care sunt în planul acestor drepte și trec prin intersecția lor. Avem

$$\widehat{dd'} = \frac{1}{C''}\log R(d', d, a, b). \tag{7}$$

Vom lua $C' = C''$ și vom vedea cum putem dispune de C și C'. Trebue de la început observat că aceste definiții sunt independente față de o transformare omografică sau o transformare prin polare reciproce. Pentru transformarea omografică este evident, căci această transformare conservă rapoartele anarmonice. În particular, orice transformare omografică care nu schimbă absolutul, lasă neschimbate definițiile precedente. Pentru transformarea prin polare reciproce, să observăm că punctele M și M' sunt înlocuite cu planele μ și μ'; punctele A și B ale absolutului vor fi înlocuite prin două plane tangente la noul absolut și care trec prin intersecția planelor μ și μ'. Formula care dă distanțele va fi înlocuită prin aceea care dă unghiurile și reciproc. Mai rămâne numai de schimbat constantele C și C'. În ce privește formula care dă unghiul a două drepte, nu trebue schimbat nimic; dreptele d și d' vor fi înlocuite cu polarele lor reciproce și cele două drepte a și b prin alte două drepte polarele lor reciproce; Constanta C' trebue deci conservată.

II. 1°. Pentru a calcula elementele definite mai sus, să considerăm ecuația punc-

tuală $f(x,y,z,t)=0$ a cuadricei absolut. Însemnând cu (x,y,z,t), (x',y',z',t') coordonatele omogene ale punctelor M și M', acelea ale punctelor de intersecție ale dreptei MM' cu cuadrica,

$$x+\lambda x',\ y+\lambda y',\ z+\lambda z',\ t+\lambda t',$$

corespund valorilor lui λ date de ecuația

$$(8)\qquad \lambda^2 f(x',y',z',t') + \lambda\left(x'\frac{\partial f}{\partial x}+y'\frac{\partial f}{\partial y}+z'\frac{\partial f}{\partial z}+t'\frac{\partial f}{\partial t}\right)+f(x,y,z,t)=0.$$

Expresiunea

$$\frac{1}{2}\left(x'\frac{\partial f}{\partial x}+y'\frac{\partial f}{\partial y}+z'\frac{\partial f}{\partial z}+t'\frac{\partial f}{\partial t}\right),$$

simetrică în raport cu variabilele x și x', o vom nota-o, pentru prescurtare, cu $f(x|x')$ și prin $(M\ M')$ când vom a pune în evidență punctele iar nu coordonatele. Avem următoarele identități

$$(9)\begin{cases} f(x|x)=f(x,y,z,t) \\ f(x+hx'|\,x''+Kx''')=f(x|x'')+hf(x'|x'')+Kf(x|x''')+hKf(x'|x'''). \end{cases}$$

Raportul anarmonic $R=\frac{\lambda}{\lambda'}$ al celor două puncte M, M' și al celor unde dreapta MM' taie cuadrica, având în vedere ecuația (8), este determinat de formula

$$(10)\qquad \frac{(1+R)^2}{4R}=\frac{(\lambda+\lambda')^2}{4\lambda\lambda'}=\frac{f^2(x|x')}{f(x|x)f(x'|x')}=\frac{(MM')^2}{(MM)(M'M')}.$$

Din această expresiune, se vede că raportul anarmonic are două valori inverse una alteia, ceeace era evident, căci se pot schimba cele două puncte unde dreapta MM' taie absolutul.

Dacă scriem constanta C din ecuația (3) sub forma $\frac{2i}{K}$, această relație devine

$$(11)\qquad \frac{2i}{K}MM'=\log R,$$

de unde

$$\cos\frac{MM'}{K}=\frac{e^{i\frac{MM'}{K}}+e^{-i\frac{MM'}{K}}}{2},\qquad R=e^{2i\frac{MM'}{K}},$$

$$\cos^2\frac{MM'}{K}=\frac{e^{2i\frac{MM'}{K}}+e^{-2i\frac{MM'}{K}}+2}{4}=\frac{R+\frac{1}{R}+2}{4},$$

$$(12)\begin{cases} \cos^2\dfrac{MM'}{K}=\dfrac{(R+1)^2}{4R}=\dfrac{f^2(x|x')}{f(x|x)f(x'|x')}=\dfrac{(MM')^2}{(MM)(M'M')}, \\ \sin^2\dfrac{MM'}{K}=1-\cos^2\dfrac{MM'}{K}=\dfrac{f(x|x)f(x'|x')-f^2(x|x')}{f(x|x)f(x'|x')}=\dfrac{(MM)(M'M')-(MM')^2}{(MM)(M'M')}. \end{cases}$$

Înlocuind în această ultimă formulă pe $x',y',\ldots$ cu $x+dx,\ y+dy,\ldots$ și ținând seamă că raportul dintre arc și sinusul său tinde către 1 când arcul tinde către zero,

$$\frac{\text{arc}\frac{MM'}{K}}{\sin\frac{MM'}{K}}\longrightarrow 1,$$

se obține elementul de arc, ds, al spațiului și care este dat de

$$(13)\qquad \frac{ds^2}{K^2}=\frac{f(x|x)f(dx|dx)-f^2(x|dx)}{f^2(x|x)}.$$

2°. Pentru a determina unghiul a două plane μ și μ', să luăm baza formată

de cele două plane tangente la absolut ce trec prin intersecția lor. Fie

$$\varphi(u, v, w, \mu) = 0$$

ecuația tangențială a absolutului. Întrebuințând notația

$$\varphi(u|u') = \frac{1}{2}\left(u'\frac{\partial\varphi}{\partial u} + v'\frac{\partial\varphi}{\partial v} + w'\frac{\partial\varphi}{\partial w} + \mu'\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right) = (\mu\mu'),$$

avem formula

$$\frac{(1+R')^2}{4R'} = \frac{\varphi^2(u|u')}{\varphi(u|u)\,\varphi(u'|u')},$$

unde R' este raportul anarmonic al planelor μ, μ' și celor două plane tangente la absolut dese prin intersecția lor. În cazul de față luăm pentru constanta C' valoarea $2i$ și avem

$$e^{2i\widehat{\mu\mu'}} = R', \tag{14}$$

de unde

$$\cos^2\widehat{\mu\mu'} = \frac{\varphi^2(u|u')}{\varphi(u|u)\,\varphi(u'|u')} = \frac{(\mu\mu')^2}{(\mu\mu)(\mu'\mu')}. \tag{15}$$

3°. Pentru a calcula unghiul a două drepte concurente, vom lua ca bază cele două tangente duse din punctul lor de intersecție și în planul lor, la absolut. Fie A punctul de intersecție al dreptelor d și d' și B și C două puncte luate arbitrar pe drepte. Raportul anarmonic al celor două drepte și al tangentelor duse din A la absolut în planul lor, este evident egal cu raportul anarmonic al punctelor B, C și al celor două puncte unde dreapta BC taie conul cu vârful A circumscris absolutului. Pentru a calcula acest raport, vom aplica formula (10), substituind absolutului conul circumscris. Întrebuințând notațiile precedente, ecuația conului este

$$(AA)(MM) - (AM)^2 = 0,$$

și aplicând formula (10), avem

$$\frac{(1+R'')^2}{4R''} = \cos^2\widehat{dd'} = \frac{[(AA)(BC) - (AB)(AC)]^2}{[(AA)(BB) - (AB)^2][(AA)(CC) - (AC)^2]}. \tag{16}$$

30. DIFERITELE CAZURI PARTICULARE ALE GEOMETRII CAYLEYNE. GEOMETRIA CAYLEYANĂ CUPRINDE CA UN CAZ LIMITĂ GEOMETRIA EUCLIDIANĂ. Pentru a vedea diferitele Geometrii ce decurg din Geometria Cayleyană, să luăm forme diferite pentru absolut.

Dacă această cuadrică este imaginară, elementele care ne dau bazele în cele trei determinări metrice (distanța a două puncte, unghiul a două plane, unghiul a două drepte concurente) vor fi totdeauna imaginar conjugate. Deci (§ 28) cele trei raporte R, R', R'' sunt imaginare cu modulul egal cu 1. După formula (14), la care se adaugă următoarea

$$e^{2i\widehat{dd'}} = R'', \tag{17}$$

unghiurile a două plane reale sau a două drepte concurente reale vor fi totdeauna reale. Pentru ca distanța a două puncte reale să fie totdeauna reală, trebue ca și constanta K să fie reală, pe care o vom înlocui-o cu R. Distanța a două puncte e dată de

$$\cos\frac{MM'}{R} = \frac{(MM')}{\sqrt{(MM)(M'M')}}.$$

Să observăm că în toate aceste definițiuni este o nesiguranță; celelalte elemente nu au semnul bine determinat și sunt cunoscute afară de un multiplu de π pentru unghiuri, sau πR dacă este vorba de distanțe. Aceasta nu e de mirare, căci o nedeterminare analoagă se prezintă pentru unghiuri în Geometria ordinară, și de asemenea pentru distanțe în Geometria sferică.

Să presupunem acum că absolutul este o cuadrică reală. Fie mai întâi că această cuadrică este o suprafață riglată. Atunci, în oricare regiune ne-am așeza, dreptele care trec printr'un punct M, sunt de două feluri; unele sunt exterioare conului circumscris cu vârful M, și care nu întâlnesc suprafața, altele care o vor tăia. Pentru cele dintâi, raportul anarmonic R format cu punctul M și un punct infinit vecin al dreptei va fi o cantitate imaginară cu modulul egal cu 1; pentru celelalte, acest raport este real și pozitiv. Deci, oricare ar fi valoarea dată constantei K în (11), vor fi punte reale vecine de M, pentru care distanța va putea să fie reală, iar altele pentru care va fi imaginară. Aceleași concluziuni au loc și pentru unghiuri. Acest caz nu corespunde la nici o realitate practică, deci nu-l vom considera în cele ce urmează.

Dacă absolutul este o cuadrică reală convexă și suntem în exteriorul acestei suprafețe, atunci prin fiecare punct vor trece drepte care taie suprafața, altele care nu o vor tăia. Vom înlătura și acest caz ca și pe precedentul pentru aceleași motive. Dar, dacă suntem în interiorul acestei suprafețe, orice dreaptă a acestei regiuni taie absolutul în două puncte; raportul $R(M, M', A, B)$ este totdeauna real pozitiv. După formula (11), pentru ca distanța să fie reală, va fi de ajuns a lua pentru K o imaginară pură de forma Ri,

$$\cos\frac{MM'}{Ri} = \frac{(MM')}{\sqrt{(MM)(M'M')}}, \quad ch\frac{MM'}{R} = \frac{(MM')}{\sqrt{(MM)(M'M')}}.$$

Atunci distanța a două puncte nu va avea de cât două valori egale și de semne contrarii. Nu tot așa pentru unghiuri, date de formulele (14), (17), căci planele tangente și tangentele care servesc de bază în aceste măsurări nu sunt totdeauna imaginar conjugate. Dacă dreapta de intersecție a două plane reale taie absolutul, formulele ne dau pentru unghiul acestor plane o valoare reală. Dacă numim spațiu accesibil acela care este în interiorul absolutului și spațiu neaccesibil acela care este exterior, acest prim caz este acela unde cele două plane au puncte comune în spațiul accesibil. Dacă, din contră, toate punctele comune ale celor două plane sunt în spațiul neaccesibil, nu mai putem vorbi de unghiul lor care este imaginar. De asemenea, două drepte care se taie, formează un unghi real, dacă punctul lor de intersecție este în spațiul accesibil.

În rezumat, vom studia două ipoteze; una, în care absolutul este o suprafață imaginară, cuprinzând toate punctele reale și care a fost introdusă în știință de Riemann; Geometria corespunzătoare se zice Riemanniană, sau eliptică. Alta, în care absolutul este o suprafață convexă (cum este sfera), unde se consideră numai regiunea spațiului interioară acestei suprafețe; această Geometrie este, după cum a arătat F. Klein[1], acea la care au fost conduși Lobatschewsky, Bolyai, Gauss și se zice Geometrie Lobatschefskyană, sau iperbolică.

(1) Sur la Géométrie dite non euclidienne (Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques, I-e série, t. II, 1871, p. 341).

Să arătăm acum că Geometria clasică este un caz limită al Geometriei Cayleyene, presupunând că absolutul se turtește nemărginit și se reduce la cercul imaginar de la infinit. În adevăr, să luăm pentru absolut sfera reprezentată în coordonate rectangulare omogene de ecuația

$$x^2+y^2+z^2+R^2t^2=0.$$

Considerând două puncte $M(x,y,z,t)$, $M'(x',y',z',t')$ și luând pentru constanta K valoarea R, formula (12) ne dă pentru distanță

$$\cos\frac{MM'}{R}=\frac{xx'+yy'+zz'+R^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+R^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2+R^2}}.$$

Când sfera se reduce la cercul de la infinit, $R\to\infty$. Dezvoltând expresia precedentă după puterile lui $\frac{1}{R}$, avem

$$1-\frac{1}{2R^2}(MM')^2+\frac{1}{R^4}(\ )+\cdots=1-\frac{1}{2R^2}\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]+\frac{1}{R^4}(\ )+\cdots$$

Comparând dezvoltările ambilor membrii, obținem ca limită a lui MM',

$$\overline{MM'}^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2,$$

care este expresia cunoscută a distanței a două puncte în coordonate rectangulare.

Pentru a vedea ce devin unghiurile, să considerăm unghiul a două plane. Ecuația tangențială a sferei fiind $u^2+v^2+w^2+\frac{p^2}{R^2}=0$, unghiul V a două plane este dat de formula

$$\cos V=\frac{uu'+vv'+ww'+\frac{pp'}{R^2}}{\sqrt{u^2+v^2+w^2+\frac{p^2}{R^2}}\sqrt{u'^2+v'^2+w'^2+\frac{p'^2}{R^2}}},$$

care se reduce, când $R\to\infty$, la expresia cunoscută din Geometria euclidiană.

31. DISCUȚIA FORMULEI CARE DĂ DISTANȚA A DOUĂ PUNCTE. Considerând formula distanței

$$\cos^2\frac{MM'}{K}=\frac{(MM')^2}{(MM)(M'M')},\quad MM'=-\frac{1}{2i\pi}\log R(M',M,A,B),\quad \cos^2\frac{MM'}{K}=\frac{(1+R)^2}{4R},$$

se vede că MM' este o funcțiune multiformă și toate valorile sale se exprimă cu una din ele cu formula

$$MM'=\pm\delta_0+n\pi K,$$

n fiind un întreg pozitiv sau negativ.

Relația $(MM')=0$, care se obține egalând cu zero numărătorul acestei expresii, exprimă că punctul M' este în planul tangent în M la absolut; iar $(MM)=0$, $(M'M')=0$ exprimă că M sau M' sunt pe absolut. Deci, distanța devine nedeterminată când unul din puncte este pe absolut și dacă celalt se află în planul tangent la absolut în primul punct. Aceasta se mai poate vedea considerând raportul $R(M,M',A,B)$.

Pentru ca distanța să fie nulă, trebue ca acest raport anarmonic să fie egal cu 1, adică M să coincidă cu M', sau A cu B. Deci, dacă M și M' sunt distincte, distanța este nulă dacă dreapta care le unește este tangentă la absolut. Dacă punctele M și M' sunt reale, cele două ipoteze pe care le-am făcut nu vor putea să se prezinte decât una din ele în cele două Geometrii considerate, Riemaniană și Lobatschewskiană.

Pentru ca distanța MM' să fie infinită, trebue ca raportul anarmonic $R(M,M',A,B)$ să fie nul sau infinit, adică unul din puncte să fie pe absolut. Când M și M' sunt reale, această ipoteză se prezintă numai în Geometria Lobatschewskyană; M și M' fiind în interiorul absolutului, distanța lor este reală și crește

nemărginite dacă unul din puncte se apropie de absolut.

Când cele două puncte M, M' sunt conjugate în raport cu absolutul, avem

$$(M, M', A, B) = -1, \quad \overline{MM'} = \frac{\pi K}{2} + n\pi K,$$

n fiind întreg. Deci, este tot una a zice că două puncte sunt conjugate, sau că una din valorile distanței lor este egală cu $\frac{\pi K}{2}$. Cu alte cuvinte, locul punctelor a căror distanță de un punct M este $\frac{\pi K}{2}$ este planul conjugat al lui M. În Geometria Lobatschewskyană acest loc nu există, pentrucă $\frac{\pi K}{2}$ este imaginar și planul polar a unui punct din interior este cu totul în afară de absolut.

Din cele expuse mai sus se pot vedea oarecare particularități relative la suprafețile care joacă în Geometria Cayleyană același rol ca și sfera, adică acelea care sunt locul punctelor la o distanță dată de un punct dat. Dacă A este un punct dat, pe care-l vom numi centrul sferei Cayleyene, ecuația acestei sfere este, după formula (12),

$$(AM)^2 = \cos^2 \frac{\delta}{K} \cdot (AA)(MM).$$

Această este o cuadrică înscrisă în absolut de-alungul planului polar al centrului A.

32. PROPOZIȚIUNI RELATIVE LA UNGHIURI. De oarece se poate trece de la plane la puncte prin metoda polarelor reciproce, concluziunile precedente se pot transporta la plane, și deci și la drepte, dacă trecem de la Geometria în spațiu la cea plană. Astfel, valorile unghiului a două plane, sau a două drepte concurente, sunt date de formula

$$\pm V_0 + n\pi .$$

Acest unghi devine nedeterminat, dacă unul din plane sau una din drepte atinge absolutul, celalalt trecând prin punctul său de contact. Unghiul devine infinit, dacă unul din plane sau una din drepte este tangentă la absolut. Acest unghi este nul dacă cele două plane se taie după o tangentă la absolut, sau dacă cele două drepte sunt într'un plan tangent la această suprafață, sau se taie în unul din punctele sale.

Unghiul devine egal cu $\frac{\pi}{2}$ dacă cele două plane sunt conjugate, sau dacă cele două drepte sunt conjugate. Două plane sunt conjugate când unul oricare din ele conține polul celuilalt. Vom zice în acest caz că sunt perpendiculare. De asemenea, două drepte sunt conjugate, când una oricare din ele întâlnește polara celeilalte; înțelegând prin două drepte polare, două drepte astfel ca planele polare ale tuturor punctelor uneia din drepte să treacă prin cealaltă și reciproc. Se mai știe că polara unei drepte este linia care unește punctele de contact a absolutului cu cele două plane tangente la absolut duse prin prima dreaptă. Așa fiind, atunci există pe fiecare din cele două drepte conjugate un punct al cărui plan polar trece prin cealaltă. Când două drepte care se taie sunt conjugate, vom zice de asemenea că sunt perpendiculare.

Se zice că o dreaptă d este perpendiculară pe un plan (P), când ea trece prin polul planului. Atunci ea va fi evident perpendiculară pe toate dreptele care trec prin piciorul său pe plan, căci aceste drepte întâlnesc toate polara dreptei d situată în planul (P).

Printr'un punct oarecare M se poate duce totdeauna o perpendiculară la un plan (P). Pentru aceasta, vom uni punctul M cu polul planului (P), astfel că dacă M coincide

cu polul, toate dreptele duse prin M vor fi perpendiculare pe planul (P). Afară de acest caz excepțional, perpendiculara este unică.

Printr'un punct M se poate duce un plan perpendicular la o dreaptă d și numai unul singur, afară numai dacă M nu este pe polara d' a lui d, în care caz toate planele duse prin d' vor fi perpendiculare pe d. În adevăr, toate planele perpendiculare pe d trebue să aibă polul lor pe d; ele trec deci prin polara d' a lui d. Deci, dacă M nu este pe această polară, este un singur plan perpendicular, determinat de M și d'.

Două plane distincte (P) și (P') au totdeauna o perpendiculară comună, care trece prin polurile celor două plane.

Când o dreaptă d este perpendiculară pe un plan (P), orice plan (P') trecând prin această dreaptă este perpendicular pe planul (P). În adevăr, polara lui d se găsește în planul (P) și deci și polul planului (P') este în planul (P).

Unghiul unei drepte cu un plan este complimentul unghiului pe care îl face dreapta cu perpendiculara pe plan dusă prin piciorul său pe plan.

33. RELAȚIUNI ÎNTRE ELEMENTELE REALE ÎN GEOMETRIA RIEMANIANĂ și LOBATSCHEWSKYANĂ. În Geometria Riemaniană, unde absolutul este imaginar, distanța a două puncte reale nu poate fi niciodată infinită, întocmai ca în Geometria sferică.

În Geometria Lobatschewskyană, unde absolutul este o suprafață convexă, și unde se consideră numai punctele interioare, distanța a două puncte devine infinită, când unul din puncte se apropie de absolut. Așa fiind, un punct nu poate să iasă afară din absolut, fără ca distanța sa la toate punctele situate în interiorul suprafeței să devie infinită. Pentru acest motiv spațiul exterior absolutului a fost numit neaccesibil.

Să ne închipuim în Geometria Riemaniană un punct M și o dreaptă d. Distanța punctului M la orice punct al dreptei d fiind finită, nu se mai poate vorbi de noțiunea de paralelă în această Geometrie, unde această noțiune a dispărut ca și în Geometria sferică.

Dacă absolutul este o suprafață convexă, cele două puncte p și p' unde dreapta d, luată în spațiul accesibil, tae absolutul vor fi la o distanță infinită de punctul M. Deci, în Geometria Lobatschewskyană sunt două paralele la o dreaptă, sau, mai clar, se poate face să treacă prin punctul M două serii de drepte; unele, cuprinse în unghiul p M p', care întâlnesc d în spațiul accesibil; altele, cuprinse în unghiul suplimentar, întâlnind porțiunea dreptei d situată în spațiul neaccesibil, considerând acest spațiu neaccesibil ca neexistent, de nu întâlnesc dreapta d.

Trecând acum la perpendicularele la un plan (P), se vede că în Geometria Riemaniană, două perpendiculare la acest plan se întâlnesc totdeauna într'un punct real, polul acestui plan. În Geometria Lobatschewskyană, dacă planul (P) tae absolutul, toate perpendicularele pe acest plan trec prin polul său, care este în spațiul neaccesibil, și trebue deci considerate că nu se întâlnesc. Deci, în Geometria Riemaniană, două perpendiculare la un plan se întâlnesc totdeauna; din contră, în

Geometria Lobatschewskyană, două perpendiculare pe un plan în spațiul accesibil nu se întâlnesc niciodată, iar printr'un punct al acestui spațiu se duce numai o perpendiculară pe plan.

Să considerăm în fine planele duse printr'un punct M perpendiculare pe o dreaptă d, plane care trebue să conție polara d' a lui d. Aceste plane pot fi nedeterminate în Geometria Riemanniană dacă M este pe d'; ele nu vor fi niciodată nedeterminate în Geometria Lobatschewskyană.

34. PROPOZIȚIUNI RELATIVE LA DOUĂ DREPTE CARE NU SE TAE. Vom stabili mai întâi că există în general două drepte care se întâlnească patru drepte date. Însemnând cu

$$P_i \equiv u_i x + v_i y + w_i z + p_i \,, \quad P_i' \equiv u_i' x + v_i' y + w_i' z + p_i' \,,$$

fie $P_i = 0$, $P_i' = 0$ ecuațiile dreptelor D_i, $i = 1,2,3,4$. O dreaptă Δ ce se sprijină pe D_1 și D_2 este la intersecția a două plane oarecare

$$P_1 + \lambda P_1' = 0, \quad P_2 + \mu P_2' = 0, \tag{18}$$

ca trec prin D_1 și D_2, λ și μ fiind variabili. Pentru ca această dreaptă să întâlnească și pe D_3, trebue ca să avem un sistem de valori pentru x, y, z, care să verifice ecuațiile

$$P_1 + \lambda P_1' = 0, \quad P_2 + \mu P_2' = 0, \quad P_3 = 0, \quad P_3' = 0.$$

Eliminând pe x, y, z între aceste ecuații, urmează

$$\begin{vmatrix} u_1 + \lambda u_1' & v_1 + \lambda v_1' & w_1 + \lambda w_1' & p_1 + \lambda p_1' \\ u_2 + \mu u_2' & v_2 + \mu v_2' & w_2 + \mu w_2' & p_2 + \mu p_2' \\ u_3 & v_3 & w_3 & p_3 \\ u_3' & v_3' & w_3' & p_3' \end{vmatrix} = 0,$$

de unde

$$p\lambda\mu + q\lambda + r\mu + s = 0. \tag{19}$$

Scriind că aceeași dreaptă Δ se sprijină și pe D_4, avem

$$p'\lambda\mu + q'\lambda + r'\mu + s' = 0. \tag{20}$$

Ecuațiile (19) și (20) ne dau valorile lui λ și μ corespunzătoare dreptei Δ, (18), care întâlnește dreptele D_1, D_2, D_3, D_4. Înmulțind în (19) și (20) cu p' și $-p$, adunând, avem

$$(p'q - pq')\lambda + (p'r - pr')\mu + p's - ps' = 0,$$

de unde se deduce valoarea lui λ, pe care introducând-o în (19), avem o ecuație de gradul al doilea în μ, care ne dă două valori pentru μ și deci, în general, sunt două drepte (18) care să se rezeme pe patru drepte date.

Fie d și d_1 două drepte și δ și δ_1 dreptele lor polare. Am văzut că orice dreaptă perpendiculară pe d, de ex., trebue să întâlnească pe δ. Deci, perpendicularele comune lui d și d_1, trebue să întâlnească δ și δ_1. Dar, am văzut că există, în general, două drepte care să întâlnească patru drepte date. Deci, două drepte admit, în general, două perpendiculare comune p și p_1. Cele două perpendiculare comune, astfel obținute, sunt polare una celeilalte. În adevăr, dreapta p întâlnind pe d, d_1, δ, δ_1, polara sa trebue să întâlnească pe δ, δ_1, d, d_1, deci trebue să se confunde cu p_1.

Dacă cele patru drepte d, δ, d_1, δ_1 sunt generatoarele de același sistem ale unui iperboloid, ele sunt întâlnite de toate generatoarele celuilalt sistem, și deci problema.

admite o infinitate de soluții.

Dacă absolutul este o suprafață convexă și dacă se consideră porțiunile dreptelor d și d_1 care sunt în spațiul accesibil, se va vedea că au o singură perpendiculară comună, căci una din aceste perpendiculare comune va tăia cele două drepte în spațiul accesibil, cealaltă, care este polara primei, va fi în întregime în spațiul neaccesibil.

35. DISTANȚA DE LA UN PUNCT LA UN PLAN ȘI LA O DREAPTĂ. Distanța de la un punct la un plan va fi destanța de la punct la piciorul perpendicularei coborâte din acest punct pe plan; ea este complimentul afară de $\frac{\pi K}{2}$ a distanței punctului la polul planului în raport cu absolutul.

De asemenea, dintr'un punct oarecare M, se poate, în general, cobori o singură perpendiculară pe o dreaptă d. Aceasta este dreapta ce trece prin M și întâlnește deodată pe d și polara sa δ. Distanța de la M la dreaptă va fi aceea de la acest punct la piciorul perpendicularei; este complimentul afară de $\frac{\pi K}{2}$ a distanței acelui punct la polara δ. Deci, locul punctelor la o egală depărtare de o dreaptă d va fi de asemenea locul punctelor la o depărtare constantă de polara sa δ.

Se poate obține acest rezultat și pe cale analitică. Fie A, B punctele unde dreapta d taie absolutul. Polara δ a lui d este la intersecția planelor polare a punctelor A și B în raport cu absolutul, care sunt planele tangente în A și B la absolut. C și D fiind punctele unde δ taie absolutul, urmează că AC, AD și BC, BD sunt cele două generatoare ale absolutului ce trec respectiv prin A și B, care sunt situate în planele tangente în A și B, aceste plane tangente fiind determinate de AC, AD și BC, BD. Deci, cele patru drepte AC, AD, BC, BD sunt generatoarele absolutului. Dacă se ia tetraedrul ABCD ca tetraedru de referință, ecuația absolutului este de forma

$$xy + zt = 0,$$

dreapta d fiind reprezentată de ecuațiile $x = 0$, $y = 0$, iar dreapta δ de ecuațiile $z = 0$, $t = 0$. Fie x_0, y_0, z_0, t_0 coordonatele unui punct M. Perpendiculara pe d, trecând prin acest punct, trebuind să întâlnească pe d și δ, are ecuațiile

$$xy_0 - yx_0 = 0, \quad zt_0 - tz_0 = 0.$$

Coordonatele piciorului P al acestei perpendiculare verifică ecuațiile dreptei d și perpendicularei și sunt

$$x = 0, \; y = 0, \; z = z_0, \; t = t_0.$$

Deci, distanța MP, care este prin definiție destanța la dreapta d, are o expresie dată de formula (12)

$$\cos \frac{MP}{K} = \frac{\sqrt{z_0 t_0}}{\sqrt{x_0 y_0 + z_0 t_0}},$$

de unde

$$\operatorname{tg} \frac{MP}{K} = \sqrt{\frac{x_0 y_0}{z_0 t_0}},$$

așa că locul punctelor la o distanță dată de o dreaptă d (și prin urmare și de polara sa δ) este cuadrica definită de ecuația

$$\frac{xy}{zt} = \text{const.}$$

Această cuadrică poate fi definită ca fiind absolutul după un patrulater strâmb format de cele patru generatoare rectilinii care trec prin punctele de intersecție ale dreptei cu absolutul.

36. FORMULE RELATIVE LA CURBE ȘI SUPRAFEȚE. I. Unghiul a două curbe care se taie într'un punct va fi acela al tangentelor în acel punct. Pentru a-l calcula, să aplicăm formula (16) (§ 29). Însemnând cu x, y, z, t coordonatele punctului A comun celor două curbe, prin d și δ caracteristicile relative la deplasările pe curbele al căror unghi vrem să-l măsurăm, atunci coordonatele punctelor B și C pe aceste curbe, infinit vecine de A, sunt

$x+dx, y+dy, z+dz, t+dt$; $x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, t+\delta t$.

Unghiul V al celor două curbe este dat de formula (16),

$$\cos V = \frac{f(x|x)f(dx|\delta x) - f(x|dx)f(x|\delta x)}{\sqrt{[f(x|x)f(dx|dx) - f^2(x|dx)][f(x|x)f(\delta x|\delta x) - f^2(x|\delta x)]}}. \tag{21}$$

Curbele sunt ortogonale când $V = 90$, adică

$$f(x|x)f(dx|\delta x) - f(x|dx)f(x|\delta x) = 0.$$

Putem da unghiului celor două curbe o interpretare simplă în modul următor. Pentru aceasta, să luăm forma cuadratică ds^2, definită de formula

$$ds^2 = \sum_{i,k}\sum a_{ik}\,dx_i\,dx_k, \quad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

unde coeficienții a_{ik} sunt funcțiuni oarecare de $x_1, x_2, \ldots x_n$, satisfăcând la condiția $a_{ik} = a_{ki}$. Forma se poate scrie

$$ds^2 = a_{11}dx_1^2 + \cdots + 2a_{12}dx_1\,dx_2 + \cdots \tag{22}$$

Făcând schimbarea de variabile oarecare, substituind în locul lui x_i funcțiunile y_i de aceste variabile, vom avea

$$ds^2 = \sum\sum a_{ik}dx_i\,dx_k = \sum\sum b_{ik}\,dy_i\,dy_k.$$

Considerând două sisteme de diferențiale, se vede că vom avea

$$\sum\sum a_{ik}dx_i\,\delta x_k = \sum\sum b_{ik}\,dy_i\,\delta y_k.$$

Înlocuind în relația precedentă pe dx_i cu $dx_i + \lambda\,\delta x_i$, ceea ce conduce a înlocui pe dy_i prin $dy_i + \lambda\,\delta y_i$, egalând coeficienții lui λ din ambii membri, avem

$$\sum\sum a_{ik}\,\delta x_i\,\delta x_k = \sum\sum b_{ik}\,\delta y_i\,\delta y_k.$$

De aci urmează că unghiul θ definit de relația

$$\cos\theta = \frac{\sum\sum a_{ik}dx_i\,\delta x_k}{\sqrt{\sum\sum a_{ik}dx_i\,dx_k}\sqrt{\sum\sum a_{ik}\delta x_i\,\delta x_k}}$$

este un invariant. Acesta se zice unghiul a două direcții definite de caracteristicele d și δ, relative la forma cuadratică (22). Când această formă este definită, adică ea se poate descompune într'o sumă de pătrate toate de același semn, θ este real.

Se vede că unghiul nu se schimbă când înmulțim sau împărțim, prin aceeași funcțiune de altminterea oarecare de variabile, pe toți coeficienții formei cuadratice. Revenind la formula (21), se poate zice că unghiul V a două direcții, definit de această formulă, este unghiul acestor două direcții, evaluat în raport cu forma cuadratică (13), care dă elementul linear în spațiul Cayleyan.

II. Dacă $\varphi(u,v,w,p)=0$ este ecuația tangențială omogenă a absolutului, unghiul a două plane este determinat de formula (15) (§ 29). Considerând două suprafețe reprezentate de ecuațiile omogene

$$F(x,y,z,t)=0,\quad F_1(x,y,z,t)=0,$$

ecuațiile planelor tangente sunt

$$X\frac{\partial F}{\partial x}+\cdots=0,\quad X\frac{\partial F_1}{\partial x}+\cdots=0,$$

pentru a găsi unghiul celor două suprafețe într'unul din punctele lor comune, vom aplica formula (15) la aceste două plane, unde u,v,w,p și u',v',w',p' sunt respectiv $\frac{\partial F}{\partial x},\ldots,\frac{\partial F_1}{\partial x},\ldots$

III. Fie $f(x,y,z,t)=Ax^2+A'y^2+A''z^2+2B'yz+2B''zx+2B'''xy+2Cxt+2C'yt+2C''zt+Dt^2=0$ ecuația punctuală a absolutului. Ecuația sa tangențială se obține scriind ecuațiile

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}&=Ax+B''y+B'z+Ct=u,\\
\tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}&=B''x+A'y+Bz+C't=v,\\
\tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z}&=B'x+By+A''z+C''t=w,\\
\tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial t}&=Cx+C'y+C''z+Dt=p,
\end{aligned}\tag{23}$$

ce determină polul unui plan (u,v,w,p); se exprimă apoi că acest pol este în plan, de unde se obține relația

$$ux+vy+wz+pt=0,\tag{24}$$

și apoi se elimină x,y,z,t între ecuațiile (23), (24). Punând

$$H=\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C\\ B'' & A' & B & C'\\ B' & B & A'' & C''\\ C & C' & C'' & D\end{vmatrix},$$

primul membru al acestei ecuații tangențiale a absolutului este

$$\varphi(u,v,w,p)=-\frac{1}{H}\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C & u\\ B'' & A' & B & C' & v\\ B' & B & A'' & C'' & w\\ C & C' & C'' & D & p\\ u & v & w & p & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{H}\left(\frac{\partial H}{\partial A}u^2+\cdots+\frac{\partial H}{\partial B''}uv+\cdots+\frac{\partial H}{\partial C}up+\cdots+\frac{\partial H}{\partial D}p^2\right).$$

De oarece coordonatele sunt omogene și sunt cunoscute afară de un factor constant, să presupunem că am ales factorul de proporționalitate astfel ca între coordonatele x,y,z,t ale unui punct care nu este pe absolut să avem

$$f(x,y,z,t)=1.\tag{25}$$

De asemenea, ecuația tangențială a absolutului fiind $\varphi(u,v,w,p)=0$, se poate alege factorul de proporționalitate astfel ca între coordonatele tangențiale u,v,w,p, ale unui plan netangent la absolut să avem relația

$$\varphi(u,v,w,p)=1.$$

În aceste condițiuni, formulele date pentru elementul linear, unghiul a două curbe se simplifică. În adevăr, diferențiind (25), avem $\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial t}dt=0$, expresiunile pe care le-am notat cu $f(x|dx)$, $f(x|\delta x)$ sunt nule, iar din (13) avem

$$ds^2=K^2f(dx|dx).\tag{26}$$

Unghiul V a două curbe, dat de (21), e dat de formula

V

(27) $$ds\,\delta s\cos V = f(dx|\delta x),$$

iar condiția de ortogonalitate este $f(dx|\delta x)=0$, sau

$$(Adx+B''dy+B'dz+Cdt)\delta x+(B''dx+A'dy+Bdz+C'dt)\delta y+$$
$$(B'dx+Bdy+A''dz+C''dt)\delta z+(Cdx+C'dy+C''dz+Ddt)\delta t=0.$$

IV. Pentru a determina normala la suprafața definită de ecuația $F(x,y,z,t)=0$, să observăm că pentru orice deplasare care se efectuează plecând de la punctul (x,y,z,t) pe suprafață, avem

(28) $$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial z}\delta z+\frac{\partial F}{\partial t}\delta t=0.$$

Considerând deplasarea dx, dy, dz, dt pentru care avem

$$Adx+B''dy+B'dz+Cdt=\lambda\frac{\partial F}{\partial x},$$
$$B''dx+A'dy+Bdz+C'dt=\lambda\frac{\partial F}{\partial y},$$
$$B'dx+Bdy+A''dz+C''dt=\lambda\frac{\partial F}{\partial z},$$
$$Cdx+C'dy+C''dz+Ddt=\lambda\frac{\partial F}{\partial t},$$

rel. ția (28) devine

$$(Adx+B''dy+B'dz+Cdt)\delta x+\dots=0,$$

care este tocmai $f(dx|\delta x)=0$, ceea ce probează că deplasarea (dx,dy,dz,dt) este perpendiculară pe toate deplasările $(\delta x,\delta y,\delta z,\delta t)$ care se pot face pe suprafață. Această deplasare are loc deci de-a lungul normalei la suprafața $F(x,y,z,t)=0$ și deci ecuațiile precedente definesc direcțiunea normalei la suprafața $F(x,y,z,t)=0$.

V. Să presupunem că am raportat absolutul la un tetraedru conjugat luat ca tetraedru de referință. Ecuația punctuală a absolutului în coordonate tetraedrice este

$$f(x,y,z,t)=a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+a_4t^2=0,$$

iar în coordonate tangențiale

$$\varphi(u,v,w,p)=\frac{u^2}{a_1}+\frac{v^2}{a_2}+\frac{w^2}{a_3}+\frac{p^2}{a_4}=0$$

Un punct care nu este pe absolut are coordonatele x,y,z,t, ce verifică relația

$$a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+a_4t^2=1.$$

Un plan ce nu este tangent la absolut are coordonatele tangențiale u,v,w,p, verificând relația

(29) $$\frac{u^2}{a_1}+\frac{v^2}{a_2}+\frac{w^2}{a_3}+\frac{p^2}{a_4}=1.$$

Elementul liniar (26) este dat de

$$\frac{ds^2}{K^2}=a_1dx^2+a_2dy^2+a_3dz^2+a_4dt^2.$$

Unghiul V a două curbe $(dx,\dots),(\delta x,\dots)$, este dat de (27),

$$\cos V=\frac{a_1dx\delta x+a_2dy\delta y+a_3dz\delta z+a_4dt\delta t}{K^2\sqrt{a_1dx^2+a_2dy^2+a_3dz^2+a_4dt^2}\sqrt{a_1\delta x^2+a_2\delta y^2+a_3\delta z^2+a_4\delta t^2}}.$$

Unghiul V a două suprafețe $F(x,y,z,t)=0$, $F_1(x,y,z,t)=0$ este dat de formula (15)

$$\cos V=\frac{\varphi(u|u')}{\sqrt{\varphi(u|u)\varphi(u'|u')}}=\frac{\frac{uu'}{a_1}+\frac{vv'}{a_2}+\frac{ww'}{a_3}+\frac{pp'}{a_4}}{\sqrt{\varphi(u,v,w,p)\,\varphi(u',v',w',p')}}$$

unde $u,\dots,u',\dots$ sunt respectiv $\frac{\partial F}{\partial x},\dots,\frac{\partial F_1}{\partial x},\dots$. Observând (29), avem

$$\cos V=\frac{1}{a_1}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{1}{a_2}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F_1}{\partial y}+\frac{1}{a_3}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial F_1}{\partial z}+\frac{1}{a_4}\frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial F_1}{\partial t}.$$

În cazul când ecuația absolutului în coordonate carteziene este

$f(x,y,z,t)=x^2+y^2+z^2+K^2=0$, elementul liniar e dat de formula (13),

$$\frac{ds^2}{K^2}=\frac{f(x,y,z,1)f(dx,dy,dz,0)-(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z})^2}{f^2(x,y,z,1)},$$

$$\frac{ds^2}{K^2}=\frac{(x^2+y^2+z^2+K^2)(dx^2+dy^2+dz^2)-(xdx+ydy+zdz)^2}{(x^2+y^2+z^2+K^2)^2},$$

$$ds^2=\frac{dx^2+dy^2+dz^2+[(xdy-ydx)^2+(ydz-zdy)^2+(zdx-xdz)^2]\frac{1}{K^2}}{\left[1+\frac{1}{K^2}(x^2+y^2+z^2)\right]^2}.$$

Când $K=R$, avem Geometria Riemaniană; când $K=Ri$, avem Geometria Lobatschewskyană; când $K\to\infty$, avem $ds^2=dx_1^2+dy_1^2+dz^2$, Geometria Euclidiană.

Deplasările Cayleyene.

37. GENERALITĂȚI. Am văzut că în Geometria Euclidiană studiul deplasărilor se reduce la acela al transformărilor omografice care conservă unghiurile și distanțele. Și în Geometria Cayleyană sunt astfel de transformări și Sophus Lie a arătat că Geometria Cayleyană este singura care are aceeași proprietate ca și Geometria Euclidiană și anume, deplasările Cayleyene depind de șase parametrii.

Vom numi deplasare Cayleyana orice transformare punctuală care conservă distanțele. Ținând seamă de definițiile distanțelor Cayleyne, acestea sunt transformări omografice căci conservă raportul anarmonic. Pentru ca o transformare omografică să conserve distanțele, trebue ca ea să conserve absolutul, adică să transforme această cuadrică în ea însăși. Transformarea omografică trebue deci să înlocuiască ecuația absolutului cu o ecuație proporțională. Se poate chiar face ca noua ecuație să fie identică cu prima, căci se pot înmulți cu o constantă arbitrară toți coeficienții unei substituții omografice. Trebue deci a găsi acele substituții liniare, care transformă o formă cuadratică în ea însăși. Să considerăm o formă cuadratică omogenă de n variabile, $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ și fie

$$x_i=\sum_k \alpha_{ik}y_k,\quad i=1,2,\dots n,\ k=1,2,\dots n,$$

substituția căutată, care face să avem

$$f(x_1, x_2, \dots x_n)\equiv f(y_1, y_2, \dots y_n).$$

Scriind că forma cuadratică $f(y_1, y_2, \dots y_n)$, obținută cu substituția considerată, are coefficienții egali cu ai formei $f(x_1, \dots x_n)$, vom obține $\frac{n(n+1)}{2}$ relații între cele n^2 constante α_{ik}; deci soluția conține $\frac{n(n-1)}{2}$ arbitrare, iar în cazul Geometriei Cayleyne în spațiul cu trei dimensiuni, unde numărul variabilelor este $n=4$, numărul lor depinde de șase parametrii;

Se obține această soluție aducând forma f la o sumă de pătrate. Considerând Hessianul formei $f(x_1, x_2, \dots x_n)$, adică determinantul

$$H=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix},$$

se ştie că după substituţia liniară, el se reproduce înmulţit cu pătratul determinantului substituţiei (modulului de transformare). Deci, dacă forma rămâne neschimbată, trebue ca determinantul substituţii să aibă pătratul său egalcu 1. Vom avea deci două feluri de substituţii liniare; pentru unele determinantul va fi -1, pentru celelalte $+1$.

În cazul Geometriei Cayleyene, unde f depinde de patru variabile, soluţia cea mai simplă de care avem nevoe va fi obţinută prin considerarea generatoarelor rectilinii. Am văzut că cele două sisteme de generatoare reale sau imaginare ale absolutului pot fi reprezentate de ecuaţiile

(1) $$P = \lambda R, \quad S = \lambda Q,$$

(2) $$P = \mu S, \quad R = \mu Q,$$

unde $P, Q; R, S$ sunt funcţiuni liniare, iar ecuaţia cuadricei se scrie

(3) $$PQ - RS = 0.$$

Să găsim toate substituţiile liniare de determinant 1 care conservă absolutul. Aceste substituţii trebuind să conserve generatoarele rectilinii ale fiecărui sistem, vom obţine relaţii de forma

$$\lambda' = \varphi(\lambda), \quad \mu' = \psi(\mu),$$

între parametrii λ, μ şi cei care le corespund λ' şi μ'. S'ar putea vedea direct prin calcul că φ şi ψ sunt funcţiuni raţionale de primul grad. Dar, substituţia căutată fiind omografică, trebue să păstreze raportul anarmonic a patru generatoare oarecare, care este egal cu acela al celor patru puncte unde aceste drepte taie o generatoare de celalt sistem. Va trebui deci ca $\varphi(\lambda)$, de ex., să satisfacă la o ecuaţie funcţională de forma

$$\frac{\varphi(\lambda) - \varphi(\lambda_0)}{\varphi(\lambda) - \varphi(\lambda_1)} \cdot \frac{\varphi(\lambda_2) - \varphi(\lambda_1)}{\varphi(\lambda_2) - \varphi(\lambda_0)} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda - \lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_0},$$

de unde se deduce imediat, dând lui $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ valori constante, că

(3) $$\varphi(\lambda) = \frac{l\lambda + m}{n\lambda + p}, \qquad \psi(\mu) = \frac{l_1\mu + m_1}{n_1\mu + p_1}.$$

Deci, pentru a obţine toate transformările omografice continue ale absolutului în el însuşi, trebue a supune parametrii celor două familii de generatoare rectilinii la două substituţii omografice liniare oarecare. Împărţind în termenii primei fracţii (3) cu unul din coeficienţii l, m, n, p, rămân numai trei constante arbitrare şi tot trei rămân şi pentru a doua fracţie (3). Pentru aceasta apar cele şase constante în substituţiile căutate, adică în deplasările Cayleyene.

Această condiţie necesară este şi suficientă. În adevăr, ecuaţia absolutului fiind $PQ - RS = 0$, formulele

(4) $$\rho P = \lambda\mu, \quad \rho Q = 1, \quad \rho R = \mu, \quad \rho S = \lambda,$$

care corespund unui punct oarecare al suprafeţei, pun în evidenţă parametrii λ şi μ ai generatoarelor rectilinii. Dacă efectuăm asupra acestor parametrii cele două substituţii liniare definite de formulele

(5) $$\lambda = \frac{a\lambda' + b}{\alpha\lambda' + \beta}, \quad \mu = \frac{a_1\mu' + b_1}{\alpha_1\mu' + \beta_1},$$

ecuațiile

$$(6)\qquad \rho'P' = \lambda'\mu', \quad \rho'Q' = 1, \quad \rho'R' = \mu', \quad \rho'S' = \lambda',$$

vor defini un punct al absolutului. Din (4) și (6) deducem

$$(7)\qquad \frac{P}{Q} = \lambda\mu, \quad \frac{R}{Q} = \mu, \quad \frac{S}{Q} = \lambda,$$

$$(8)\qquad \frac{P'}{Q'} = \lambda'\mu', \quad \frac{R'}{Q'} = \mu', \quad \frac{S'}{Q'} = \lambda'.$$

Înlocuind în (7) pe λ și μ cu valorile lor (5) și ținând seamă de (8), avem

$$\frac{P}{Q} = \frac{aa_1\lambda'\mu' + ba_1\mu' + ab_1\lambda' + bb_1}{\alpha\alpha_1\lambda'\mu' + \beta\alpha_1\mu' + \alpha\beta_1\lambda' + \beta\beta_1} = \frac{aa_1P' + ba_1R' + ab_1S' + bb_1Q'}{\alpha\alpha_1P' + \beta\alpha_1R' + \alpha\beta_1S' + \beta\beta_1Q'}$$

și în mod analog

$$\frac{R}{S} = \frac{\alpha a_1P' + \beta b_1Q' + \beta a_1R' + b_1\alpha S'}{a\alpha_1P' + b\beta_1Q' + b\alpha_1R' + a\beta_1S'}$$

și introducând factorul de proporționalitate ρ, urmează

$$(9)\qquad \begin{aligned} \rho P &= aa_1P' + bb_1Q' + ba_1R' + ab_1S', \\ \rho Q &= \alpha\alpha_1P' + \beta\beta_1Q' + \beta\alpha_1R' + \alpha\beta_1S', \\ \rho R &= \alpha a_1P' + \beta b_1Q' + \beta a_1R' + \alpha b_1S', \\ \rho S &= a\alpha_1P' + b\beta_1Q' + b\alpha_1R' + a\beta_1S'. \end{aligned}$$

Considerând aceste ecuații ca aplicate la două puncte oarecare ale spațiului, ele definesc o transformare omografică. Avem

$$\rho^2(PQ - RS) = \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} (P'Q' - R'S').$$

Dar, luând pentru ρ valoarea dată de ecuație

$$\rho^2 = \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix},$$

urmează că transformarea definită de ecuațiile (9) va reproduce primul membru al ecuației absolutului.

Se vede că pe această suprafață parametrii generatoarelor în punctele corespunzătoare sunt legați cu relațiile (5).

Observare. Să considerăm cazul particular al Geometriei Euclidiene clasice, când absolutul se reduce la cercul imaginar de la infinit și unde deplasările se reduc deci la studiul omografiilor care conservă cercul de la infinit, ale căror ecuații sunt $t = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Aceste deplasări sunt reprezentate de ecuațiile

$$(10)\qquad \begin{aligned} x &= a_1X + b_1Y + c_1Z + \alpha_1T, \\ y &= a_2X + b_2Y + c_2Z + \alpha_2T, \\ z &= a_3X + b_3Y + c_3Z + \alpha_3T, \\ t &= \qquad\qquad\quad T, \end{aligned}$$

împreună cu

$$(11)\qquad x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2(X^2 + Y^2 + Z^2), \quad t = T = 0,$$

care arată că este conservat cercul de la infinit, ρ fiind o constantă arbitrară.

Făcând translația

$$(12)\qquad x = \alpha_1 + X', \quad y = \alpha_2 + Y', \quad z = \alpha_3 + Z',$$

astfel ca noua origină a axelor perpendiculare $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ să fie $O'(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, deplasarea rămasă din (10) este de forma

$$(13)\qquad \begin{aligned} X' &= a_1X + b_1Y + c_1Z, \\ Y' &= a_2X + b_2Y + c_2Z, \\ Z' &= a_3X + b_3Y + c_3Z, \end{aligned}$$

împreună cu

$$(14)\qquad X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = \rho^2(X^2 + Y^2 + Z^2),$$

care înlocuiește relația (11). Făcând înlocuirile, avem

$$(a_1X + b_1Y + c_1Z)^2 + \dots \equiv \rho^2(X^2 + Y^2 + Z^2),$$

de unde, prin identificare,

$$(15)\qquad \begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= \rho^2, & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 &= 0, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 &= \rho^2, & b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 &= 0, \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= \rho^2, & c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 &= 0. \end{aligned}$$

Punând $\frac{a_i}{\rho} = a_i', \dots \frac{c_i}{\rho} = c_i'$, relațiile (13) și (15) devin

$$(16)\qquad X' = \rho X'', \quad Y' = \rho Y'', \quad Z' = \rho Z'',$$

$$(17)\qquad \begin{aligned} X'' &= a_1'X + b_1'Y + c_1'Z, \\ Y'' &= a_2'X + b_2'Y + c_2'Z, \\ Z'' &= a_3'X + b_3'Y + c_3'Z, \end{aligned}$$

$$(18)\qquad \begin{aligned} a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2 &= 1, & a_1'b_1' + a_2'b_2' + a_3'b_3' &= 0, \\ b_1'^2 + b_2'^2 + b_3'^2 &= 1, & b_1'c_1' + b_2'c_2' + b_3'c_3' &= 0, \\ c_1'^2 + c_2'^2 + c_3'^2 &= 1, & c_1'a_1' + c_2'a_2' + c_3'a_3' &= 0. \end{aligned}$$

Relațiile (18) probează că transformarea (17) este o rotație a axelor de coordonate, sau că această transformare este o rotație ($\S$ 24) în jurul unei axe ce trece prin O'.

Să însemnăm cu $m(x, y, z)$ punctul dat și $M(X, Y, Z)$ punctul obținut cu transformarea (10). Fie $m'(X', Y', Z')$ punctul obținut din $m(x, y, z)$ cu translația (12) egală cu OO', $m''(X'', Y'', Z'')$ punctul obținut din m' cu (16), adică $X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = \rho^2(X''^2 + Y''^2 + Z''^2)$ și $\overline{O'm'} = \rho\overline{O'm''}$; deci m'' se obține din m' cu o omotetie cu raportul ρ. Punctul $M(X, Y, Z)$ se obține din m'' ca (17), cu o rotație în jurul unei axe ce trece prin O'. Așa dar, deplasarea omografică ce lasă neschimbat cercul imaginar de la infinit, se reduce la o translație și o rotație cu o omotetie, adică o similitudine cu raportul ρ. Translația depinde de trei parametrii $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; rotația (17) de trei parametrii și omotetia (16) de parametrul ρ; deci, în total, deplasarea (10), care lasă neschimbat cercul imaginar de la infinit, depinde de șapte constante arbitrare.

Dar, am văzut că în deplasarea Cayleyană între două poziții arbitrare, însă, făcând transformarea omografică care conservă absolutul, dar putea schimba valoarea constantei K care figurează în expresia distanței Cayleyene în funcțiune de raportul anarmonic, deci, de fapt, sunt tot șapte constante arbitrare.

38. STUDIUL CAZULUI UNDE GENERATOARELE UNUI SISTEM NU SUNT DEPLASATE DE TRANSFORMARE. Am văzut că deplasările Cayleyene se obțin supunând la două substituții omografice liniare ce distinde parametrii celor două sisteme de generatoare. Aceste două substituții

lineare nu pot să se reducă în acelaș timp la două substituții identice,

$$\lambda = \lambda', \quad \mu = \mu',$$

căci orice omografie care nu deplasează nici unul din punctele unei cuadrice, conservă toate dreptele și se reduce prin urmare la o substituție identică. Se poate însă ca aceasta să aibă loc pentru unul din cele două sisteme de generatoare. De ex., să presupunem că formulele (5) se reduc la

$$\lambda = \lambda', \quad \mu = \frac{a_1\mu' + b_1}{\alpha_1\mu' + \beta_1}. \tag{18}$$

În acest caz, nici un punct al celor două generatoare din sistemul al doilea, ai căror parametrii sunt dați de ecuația

$$\mu = \frac{a_1\mu + b_1}{\alpha_1\mu + \beta_1}, \qquad \alpha_1\mu^2 + (\beta_1 - a_1)\mu - b_1 = 0,$$

nu va fi deplasat. Vor fi deci pe absolut două generatoare ale căror toate punctele vor rămâne neschimbate în deplasarea considerată. Această deplasare nu poate fi reală decât dacă absolutul este o cuadrică imaginară. În adevăr, dacă cuadrica este reală, cele două sisteme de generatoare sunt imaginar conjugate și orice deplasare care lasă neschimbat primul sistem de generatoare, va lăsa și pe al doilea. Deci, acest fel de deplasare nu are loc de cât în Geometria Riemaniană.

Să presupunem deci că absolutul este o cuadrică imaginară și că am luat pe această suprafață două generatoare rectilinii imaginar conjugate de același sistem, d și d_1, care rămân neschimbate. Deplasarea corespunzătoare va fi definită în modul următor. Fie M un punct oarecare al spațiului. Se poate totdeauna duce prin acest punct o dreaptă D care să întâlnească deodată pe d și d_1 și această dreaptă va fi evident reală. Fiecare din cele două generatoare duble d și d_1, care rămân neschimbate, ca va alunecă lungul ei însăși în această deplasare. Astfel, dacă M' este noua poziție a lui M, atunci M' va fi pe dreapta D.

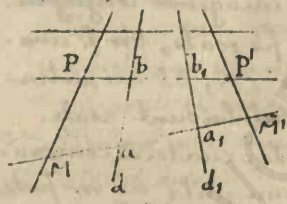

Fig. 8.

Pentru a defini relația dintre M și M', vom considera alt punct P oarecare și fie P' noua sa poziție. Toate dreptele care se sprijină pe MP (fig. 8), pe d și d_1, vor întâlni evident pe $M'P'$. Deci, MP, $M'P'$, d, d_1 sunt patru generatoare rectilinii ale aceleiași cuadrice. Să numim cu a, a_1 și b, b_1 punctele unde dreptele MM', PP' taie pe d și d_1. După proprietățile cuadricelor riglate (§ 13), raportul anarmonic $R(M', M, a, a_1)$ va fi egal cu $R(P', P, b, b_1)$ și ținând seamă de definiția distanțelor Cayleyene, urmează că distanța MM' este totdeauna egală cu PP' și prin urmare va fi constantă.

Deci, se pot defini aceste deplasări Riemaniene, zicând că toate punctele spațiului sunt deplasate cu aceeași lungime și că dreapta reală care unește un punct cu noua sa poziție întâlnește două generatoare fixe ale absolutului, imaginar conjugate una cu alta.

Un exemplu de astfel de deplasări avem în modul următor. Dacă punem

$$(19)\qquad \begin{aligned} X &= ax + by + cz + dt,\\ Y &= -bx + ay + dz - ct,\\ Z &= -cx - dy + az + bt,\\ T &= -dx + cy - bz + at, \end{aligned}$$

și întrebuințând o identitate a lui Lagrange, se vede că avem

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + t^2).$$

Deci, dacă avem $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$, formulele (19) transformă forma cuadratică $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ în ea însăși. Se vede că această transformare este de prima clasă, cu determinantul egal cu 1. Se poate totdeauna presupune că am ales astfel tetraedrul de referință, astfel ca ecuația absolutului să fie

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0.$$

Să definim parametrii generatoarelor acestei suprafețe prin formulele

$$\frac{X - iY}{Z - iT} = \lambda, \quad \frac{X + iY}{Z - iT} = \mu, \quad \frac{x - iy}{z - it} = \lambda', \quad \frac{x + iy}{z - it} = \mu'.$$

Ținând seamă de ecuațiile (19), avem

$$\lambda = \lambda', \qquad \mu = \frac{(a - ib)\mu' + c + id}{(-c + id)\mu' + a + ib},$$

ceea ce probează că, în această deplasare, generatoarele unui sistem au rămas neschimbate.

39. STUDIUL CAZULUI GENERAL AL DEPLASĂRILOR. I. Să trecem acum la cazul general, unde cele două substituții omografice la care sunt supuse generatoarele rectilinii ale absolutului sunt oarecare. Dacă deplasarea este reală și absolutul este o cuadrică imaginară, cele două omografii la care sunt supuse generatoarele rectilinii ale fiecărui sistem, vor fi astfel că dreptele lor duble sunt imaginar conjugate. Însoțind cu ABCD (Fig. 9) patrulaterul format de cele două perechi de drepte duble, aceste drepte duble sunt AB și CD, pentru prima omografie și AD și BC pentru a doua omografie și sunt drepte imaginar conjugate. De aci urmează că punctele A și C, care n'ar putea să fie reale, vor fi imaginar conjugate și tot așa și cu B și D. Deci diagonalele AC, BD ale patrulaterului ABCD format de cele patru generatoare ale absolutului sunt reale.

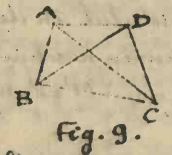

Fig. 9.

Să presupunem că deplasarea este reală, iar absolutul este o cuadrică convexă. Atunci, cele două drepte duble AB și CD ale uneia din omografii nu vor putea fi imaginar conjugate. Dreptele duble AD și BC ale celeilalte omografii vor fi imaginar conjugate ale primelor. Dacă AD, de ex., este imaginar conjugată cu AB și prin urmare și CD cu CB, punctele A și C vor fi reale și punctele B și D imaginar conjugate. Astfel, diagonalele AC, BD ale patrulaterului ABCD vor fi încă reale și una din ele întâlnește absolutul în două puncte reale.

Să observăm că în ambele cazuri aceste două diagonale sunt polare una alteia în raport cu absolutul. De ex., AC este intersecția planelor tangente în B și D, care sunt planele polare ale lui B și D în raport cu absolutul. Așa dar, în orice deplasare, există două drepte Δ, Δ_1, polare una alteia în raport cu absolutul, care alunecă de alungul lor, aceste două drepte fiind reale când depla-

sarea este reală. Dreptele Δ și Δ_1 se zic axele deplasării.

II. Pentru a vedea cum se efectuează această deplasare, să presupunem că dreptele Δ și Δ_1 sunt date și fie M un punct al dreptei Δ. După deplasare, acest punct ajunge într'un alt punct M' al lui Δ și deci M' se va deduce din M cu o omografie. Punctele duble ale acelei omografii sunt evident acelea, A și C, de ex., unde dreapta Δ taie absolutul. Dar se știe că raportul unui armonic format de două punte oarecare și cele două puncte duble ale omografii este constant. Deci, raportul $R(M', M, A, C)$ va rămâne constant, adică distanța MM', evaluată cu raport cu absolutul, rămâne constantă.

Așa dar, pe fiecare din dreptele Δ și Δ_1, deplasarea va face ca punctele să fie mișcate pe aceleași drepte cu o cantitate constantă, care nu este aceeași pentru cele două drepte.

Să considerăm acum un punct oarecare P în spațiu și noua sa poziție P' după deplasare. Să ducem prin punctul P o dreaptă d care întâlnește deodată pe Δ și Δ_1 și prin urmare (fig 32) le este perpendiculară. Fie m și μ punctele sale de întersecție cu Δ și Δ_1. Noua poziție m' a lui m se va obține luând (fig. 10) pe Δ o lungime constantă a; de asemenea, noua poziție μ' a lui μ, se va obține luând pe Δ_1 o lungime α constantă și $m'\mu'$ va fi noua poziție d' a lui d.

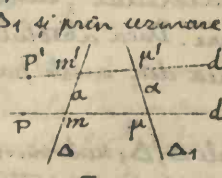

Fig. 10.

Pentru a obține noua poziție P' a lui P, va fi destul de a duce pe d', începând de la m', o lungime (cayleyană) $m'P'$ egală cu mP (căci distanțele sunt păstrate).

Este analogie între această construcție și geometria obișnuită. Se poate trece de la $m\mu$ la $m'\mu'$ luând ca intermediar $m'\mu$. Atunci, în trecerea de la $m\mu$ la $m'\mu$, punctul μ va rămâne imobil și mm' va fi egal cu a. În trecerea de la $m'\mu$ la $m'\mu'$, punctul m' va rămâne imobil și $\mu\mu'$ va fi egal cu α. Această are loc ca și cum dreapta $m\mu$ s'a învârtit de un unghi constant proporțional cu α într'un plan perpendicular pe Δ. Dacă absolutul se reduce la cercul imaginar de la infinit, prima deplasare a lui $m\mu$ la $m'\mu$ devine translația de lungul axei unei deplasări elicoidale, a doua se reduce la o rotație în jurul acestei axe.

III. Construcția precedentă ne conduce la o clasificare a deplasărilor. Dacă constantele a și α nu sunt nule, toate punctele spațiului vor fi deplasate afară de cele patru puncte A, B, C, D unde axele Δ, Δ_1 taie absolutul, căci dreapta $m\mu$, care conține punctul P, este înlocuită cu $m'\mu'$, care n'are nici un punct comun cu ea. Deci punctul P' nu se poate confunda cu P. Deplasarea corespunzătoare se zice elicoidală.

Dacă numai una din constantele a, α sunt nule, a, de ex., toate punctele dreptei Δ rămân neschimbate. Vom zice că deplasarea este o rotație în jurul dreptei Δ.

Dacă ambele constante a și α sunt nule, toate punctele dreptelor Δ și Δ_1, toate dreptele care au fost $m\mu$, sunt conservate prin deplasare. Pentru a construi punctul P' corespunzător punctului P al lui $m\mu$, se va observa că pune-

tele P și P' se corespund într'o omografie ale cărei puncte duble sunt M și μ, și a cărei o pereche de puncte omologate este formată de punctele p și p' unde dreapta mμ taie absolutul. Dar, p și p' sunt conjugate armonic în raport cu segmentul mμ, căci Δ și Δ1 sunt conjugate în raport cu absolutul; deci și punctele P și P' se vor bucura de aceeaș proprietate și prin urmare, deplasarea (care corespunde cazului când α și α sunt nule, se obține luând două drepte Δ, Δ1 polare reciproce una alteia în raport cu absolutul și construind conjugatul armonic P' al unui punct oarecare P în raport cu segmentul determinat de axele Δ, Δ1 pe dreapta ce trece prin P și întalnește aceste două axe. Avem, astfel, un nou exemplu și mai general ca cel întalnit (§38,1) al deplasărilor a căror repetare aduce orice figură la poziția primitivă; acestea se numesc reîntoarceri.

În rezumat, avem trei feluri de deplasări, care pot fi reale. 1° Deplasări elicoidale, în care rămân neschimbate patru puncte A, B, C, D ale absolutului. Diagonalele Δ, Δ1 ale patrulaterului format de aceste patru puncte sunt polare una a celeilalte. Acestea, împreună cu laturile patrulaterului, sunt singurele drepte care alunecă dealungul lor însi-le în deplasare. Dacă absolutul este o suprafață convexă și dacă deplasarea este reală, două din aceste patru puncte sunt reale.

2° Rotațiuni, pentru care toate punctele uneia din dreptele Δ, Δ1 sunt imobile.

3° Reîntoarceri, pentru care rămân imobile toate punctele axelor Δ, Δ1. Trebue să facem distincție între aceste deplasări și deplasările Riemaniene, pe care le-am studiat în capitolul precedent (§38), și care aveau proprietatea caracteristică că fac să alunece asupra lor însi-le o dublă infinitate de drepte, adică acelea care întâlnesc două generatoare imaginar conjugate ale absolutului, alese arbitrar.

Analiza Cayleyană.

40. TRIGONOMETRIA. Din studiul deplasărilor Cayleyene rezultă că în această Geometrie, ca și în Geometria clasică, vom avea o Trigonometrie, adică vor exista trei relații între laturile și unghiurile unui triunghi plan. Aceste șase elemente depind de nouă cantități, coordonatele celor trei vârfuri; dar putem deplasa triunghiul și reduce la zero șase din aceste coordonate, astfel că elementele vor depinde cel mult de trei parametrii și deci vor trebui să fie legate prin trei relații. Dacă se ia, de ex., ca tetraedru de referință acela care este format de vârfurile triunghiului ABC și de polul D al planului său în raport cu absolutul, ecuația acestei cuadrice va avea forma

$$x^2+y^2+z^2+t^2+2\alpha yz+2\beta zx+2\gamma xy=0$$

și cele șase elemente se vor exprima în funcțiune de α, β, γ.

I. Vom presupune mai întâi că absolutul este o cuadrică imaginară, și să considerăm un triunghi ABC, ale cărui laturi și unghiuri să le notăm cu a, b, c, A, B, C. Formulele de la §29, ne dau

$$(1)\qquad \cos\frac{a}{R} = \frac{(BC)}{\sqrt{(BB)}\sqrt{(CC)}},$$

$$(2)\qquad \sin\frac{a}{R} = \frac{\sqrt{(BB)(CC)-(BC)^2}}{\sqrt{(BB)}\sqrt{(CC)}}$$

$$(3)\qquad \cos A = \frac{(AA)(BC)-(AB)(AC)}{\sqrt{(AA)(BB)-(AB)^2}\sqrt{(AA)(CC)-(AC)^2}},$$

de unde urmează

$$(4)\qquad \sin A = \frac{\sqrt{(AA)}\sqrt{\Delta}}{\sqrt{(AA)(BB)-(AB)^2}\sqrt{(AA)(CC)-(AC)^2}},$$

unde

$$(5)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} (AA) & (AB) & (AC) \\ (AB) & (BB) & (BC) \\ (AC) & (BC) & (CC) \end{vmatrix}.$$

Făcând permutări circulare cu A, B, C, vom obține cu formule analoage, liniile trigonometrice ale lui $\frac{b}{R}, \frac{c}{R}, B, C$. Să convenim ca în toate formulele, radicalii să fie luați peste tot cu aceeași determinare (semn). Atunci formula (3) se poate scrie

$$\sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos A = \cos\frac{a}{R} - \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R},$$

de unde, prin permutări circulare, se deduce sistemul

$$(6)\qquad \begin{aligned} \cos\frac{a}{R} &= \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos A, \\ \cos\frac{b}{R} &= \cos\frac{c}{R}\cos\frac{a}{R} + \sin\frac{c}{R}\sin\frac{a}{R}\cos B, \\ \cos\frac{c}{R} &= \cos\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R} + \sin\frac{a}{R}\sin\frac{b}{R}\cos C. \end{aligned}$$

De asemenea, ecuația (4) se poate scrie

$$(7)\qquad \sin A \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{(AA)}\sqrt{(BB)}\sqrt{(CC)}},$$

de unde se deduce proporționalitatea sinusurilor

$$(8)\qquad \frac{\sin A}{\sin\frac{a}{R}} = \frac{\sin B}{\sin\frac{b}{R}} = \frac{\sin C}{\sin\frac{c}{R}}.$$

Regăsim formulele Trigonometriei sferice pe o sferă de rază R. Dacă este vorba de un triunghi real, luând pentru radicalii analogi cu $\sqrt{(BB)(CC)-(BC)^2}$ semne convenabile, se va putea obține valori pozitive pentru $\sin\frac{a}{R}, \sin\frac{b}{R}, \sin\frac{c}{R}$, și de asemenea, alegând o determinare convenabilă pentru $\sqrt{\Delta}$, se vor obține valori pozitive pentru $\sin A, \sin B, \sin C$. Se va putea lua pentru cele șase elemente $A, B, C, \frac{a}{R}, \frac{b}{R}, \frac{c}{R}$ valori cuprinse între 0 și π.

II. Să presupunem acum că absolutul este o cuadrică reală convexă. Vom putea lua

$$(9)\qquad \cos\frac{a}{R} = \frac{(BC)}{\sqrt{(BB)}\sqrt{(CC)}},$$

$$(10)\qquad i\sin\frac{a}{Ri} = \frac{\sqrt{(BC)^2-(BB)(CC)}}{\sqrt{(BB)}\,\sqrt{(CC)}},$$

$$(11)\qquad \cos A = \frac{(AB)(AC)-(AA)(BC)}{\sqrt{(AB)^2-(AA)(BB)}\,\sqrt{(AC)^2-(AA)(CC)}},$$

$$(12)\qquad \sin A = \frac{\sqrt{(AA)}\sqrt{\Delta}}{\sqrt{(AB)^2-(AA)(BB)}\,\sqrt{(AC)^2-(AA)(CC)}},$$

Δ fiind dat de (5). Luând radicalii cu aceeaș determinare, vom regăsi formulele (6) și (8), unde R va fi înlocuit cu Ri, adică[1]

$$(13)\qquad \begin{aligned} \cos\frac{a}{Ri} &= \cos\frac{b}{Ri}\cos\frac{c}{Ri} + \sin\frac{b}{Ri}\sin\frac{c}{Ri}\cos A,\\ \cos\frac{b}{Ri} &= \cos\frac{c}{Ri}\cos\frac{a}{Ri} + \sin\frac{c}{Ri}\sin\frac{a}{Ri}\cos B,\\ \cos\frac{c}{Ri} &= \cos\frac{a}{Ri}\cos\frac{b}{Ri} + \sin\frac{a}{Ri}\sin\frac{b}{Ri}\cos C, \end{aligned}$$

$$(14)\qquad \frac{\sin A}{\sin\frac{a}{Ri}} = \frac{\sin B}{\sin\frac{b}{Ri}} = \frac{\sin C}{\sin\frac{c}{Ri}}.$$

Dacă triunghiul ABC este real și în spațiul accesibil, se va putea lua ecuația absolutului astfel ca (AA), (BB), (CC) să fie pozitivi. Se va vedea ușor că expresiunile astfel ca (BC) sunt de asemenea pozitive, căci semnul lui BC, de ex., nu poate să se schimbe când B și C se deplasează rămânând în interior, pentrucă atunci aceste puncte nu devin niciodată conjugate unul cu altul, și acest semn este pozitiv când B se confundă cu C. În mod analog se arată că expresiunile de felul lui $(BC)^2-(BB)(CC)$ rămân pozitive. Deci, luând toate radicalele cu semnul $+$, se va obține pentru $\frac{a}{R}$, $\frac{b}{R}$, $\frac{c}{R}$ valori pozitive și se va putea lua pentru unghiurile A, B, C valori cuprinse între 0 și π.

III. În cele două Geometrii pe care le-am considerat, relațiile între cele șase elemente ale unui triedru sunt aceleași ca în Geometria Euclidiană, acest triedru fiind oarecare dacă absolutul este imaginar, și având un vârf în spațiul accesibil dacă absolutul este o cuadrică reală și convexă. În adevăr, să raportăm absolutul la tetraedrul conjugat al cărui unul din vârfuri să fie vârful S al triedrului. În ambele cazuri, ecuația absolutului are una din formele

$$\pm t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Muchile triedrului înțeapă planul polar al vârfului acestui triedru în trei puncte A, B, C, pentru care t va fi nul și cărora se pot alege celelalte coordonate astfel ca $x^2+y^2+z^2=1$. Se va putea deci face să corespunză celor trei puncte A, B, C, trei puncte A', B', C' ale unei sfere cu raza egală cu 1 și având pentru coordonate rectangulare coordonatele omogene ale punctelor A, B, C. Se vede deci că elementele triedrului se calculează cu aceleași formule ca ale triunghiului sferic $A'B'C'$ și deci propoziția enunțată este demonstrată.

41. VOLUMUL. I. Am văzut că în Geometria Euclidiană, elementul de volum poate fi caracterizat prin proprietatea că nu se schimbă când efectuăm deplasarea cea mai generală. Să adoptăm și în noua Geometrie această

(1) Sau $\operatorname{ch}\frac{a}{R} = \operatorname{ch}\frac{b}{R}\operatorname{ch}\frac{c}{R} - \operatorname{sh}\frac{b}{R}\operatorname{sh}\frac{c}{R}\cos A, \ldots$

definiție.

Să luăm ecuația absolutului sub forma

$$x^2+y^2+z^2+1=0.$$

Orice integrală triplă este de forma

$$V=\iiint \varphi(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

și a rămâne a determina pe φ astfel ca această integrală să nu se schimbe dacă se efectuează o substituție omografică oarecare ce conservă absolutul.

Să considerăm mai întâi acelea din aceste substituții care sunt întregi și reproduc $x^2+y^2+z^2$. Ele sunt ortogonale, de forma

$$x=ax'+by'+cz',\quad y=a'x'+b'y'+c'z',\quad z=a''x'+b''y'+c''z',$$

cu determinantul egal cu unitatea. Ele transformă integrala triplă V în următoarea

$$\iiint \varphi(ax'+by'+cz',\ a'x'+b'y'+c'z',\ a''x'+b''y'+c''z')\,dx'\,dy'\,dz'.$$

Pentru ca V să se reproducă, trebue ca funcțiunea φ să depindă numai de $x^2+y^2+z^2$, astfel că V se va putea pune sub forma

$$V=\iiint F(1+x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Să facem acum substituția

$$x=\frac{x'}{z'},\quad y=\frac{y'}{z'},\quad z=-\frac{1}{z'},\tag{15}$$

care, de asemenea, conservă absolutul. Integrala V devine

$$V=\iiint F\left(\frac{1+x'^2+y'^2+z'^2}{z'^2}\right)\frac{dx'\,dy'\,dz'}{z'^4}$$

și, după cele ce am văzut, trebuind să fie independentă de z', trebue să avem

$$F(u)=\frac{C}{u^2},$$

C fiind o constantă. Volumul va fi deci definit cu o integrală de forma

$$V=C\iiint \frac{dx\,dy\,dz}{f^2(x,y,z,1)},\tag{16}$$

ecuația omogenă a absolutului fiind $f(x,y,z,t)=0$.

Dacă absolutul este o suprafață reală, substituția (15) n'ar fi bună, dar, este ușor de a o înlocui cu alta fracționară care ar conduce la același rezultat.

Pentru a determina constanta C, să punem condiția ca elementul de integrală V să devie cel din Geometria clasică, când Geometria Cayleyană se reduce la Geometria Euclidiană. În acest caz, obținem $C=K^3$.

II. Acest rezultat se mai poate obține și prin alte considerații. Am văzut că elementul liniar al spațiului se poate pune sub forma

$$ds^2=K^2\,\frac{f(x,x)f(dx,dx)-f^2(x,dx)}{f^2(x,x)}.$$

Făcând $t=1$, vom avea o formă cuadratică de diferențiale dx, dy, dz,

$$ds^2=A\,dx^2+A'dy^2+A''dz^2+2B\,dy\,dz+2B'dz\,dx+2B''dx\,dy.$$

Dar, se știe că, făcând o schimbare de variabile oarecare, integrala triplă

$$V=\iiint \Delta\,dx\,dy\,dz,$$

unde avem

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix},$$

rămâne neschimbată. Cu atât mai mult, dacă se efectuează substituțiile liniare care conservă absolutul.

Înmulțind cu H hessianul formei $f(x, y, z, t)$, avem

$$\Delta = \frac{K^6}{f^4} H.$$

Deci

$$V = K^3 \sqrt{H} \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{f^2(x, y, z, 1)}.$$

Dacă absolutul este imaginar, H va fi pozitiv și K real, dacă absolutul este o cuadrică reală conexă, H va fi negativ și K o imaginară pură. Regăsim deci cu o mică schimbare de notații, expresia volumului dat de (16).

III. Să aplicăm această formulă și să luăm ecuația absolutului sub forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0.$$

Avem

$$V = R^3 \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}.$$

Făcând substituția

(17) $$x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \quad z = \rho \cos\theta,$$

obținem

$$V = R^3 \iiint \frac{\rho^2 \, d\rho \, d\theta \, d\varphi}{(1+\rho^2)^2}.$$

Să întindem această integrală pentru tot spațiul; pentru aceasta, vom face pe θ să varieze de la 0 la π, pe φ de la 0 la 2π și pe ρ de la 0 la ∞. Volumul total al spațiului va fi

$$\frac{1}{2}\pi^3 R^3,$$

adică este finit.

Dacă absolutul este o suprafață reală, a cărei ecuație se pune sub forma

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0,$$

vom înlocui pe K cu Ri, iar volumul devine

$$V = R^3 \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^2}.$$

Făcând substituția (17), avem

$$V = R^3 \iiint \frac{\rho^2 \, d\rho \, d\theta \, d\varphi}{(1-\rho^2)^2}$$

și ρ devine infinit când ρ tinde către 1, adică atunci când ne apropiem de absolut.

42. ARIA. Aceleași considerațiuni se pot întrebuința și în cazul ariilor. Pentru ariile plane, vom considera elementul liniar în plan

$$ds^2 = K^2 \frac{f(x, y, 1)\, f(dx, dy) - f^2(x, dx)}{f^2(x, y, 1)},$$

unde $f(x, y, z) = 0$ este ecuația omogenă a absolutului. Elementul liniar este de forma

$$ds^2 = A\,dx^2 + A'\,dy^2 + 2B\,dx\,dy,$$

iar integrala dublă

$$\iint \sqrt{B^2 - AA'}\; dx\,dy$$

va fi un invariant. Făcând calculele, va trebui să luăm pentru arie

(18) $$\mathcal{A} = K^3\sqrt{H}\iint \frac{dx\,dy}{f^{3/2}(x,y,1)},$$

H fiind hessianul absolutului.

II. Ca aplicație, să presupunem că am luat în plan două puncte reale oarecare A, B și polul lui AB. Luând acest triunghi de referință, ecuația absolutului va fi de forma

$$f(x,y,z) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + z^2 = 0,$$

ecuația dreptei AB fiind $z=0$, punctele A și B având respectiv coordonatele $y=0, z=0$ și $x=0, z=0$.

Fie $C(x,y,1)$ un punct din plan. Unghiul $\theta = ACB$ poate fi calculat, aplicând formula cunoscută,

$$\cos\theta = \frac{(CC)(AB) - (AC)(BC)}{\sqrt{(AA)(CC) - (AC)^2}\ \sqrt{(BB)(CC) - (BC)^2}},$$

care, în cazul de față, devine

$$\cos\theta = \frac{b - \delta xy}{\sqrt{(a+\delta y^2)(c+\delta x^2)}},$$

$\delta = ac - b^2$ fiind hessianul absolutului. Avem

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{\delta}\ \sqrt{f(x,y,1)}}{\sqrt{(a+\delta y^2)(c+\delta x^2)}}.$$

Vom alege semnele astfel ca θ să devie egal cu π, când C vine să se așeze pe AB între A și B.

Se vede că unghiul θ definit mai sus, satisface la ecuația cu derivate parțiale

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y} = \frac{\sqrt{\delta}}{f^{3/2}};$$

deci expresia ariei se scrie

$$\mathcal{A} = K^2\iint \frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy.$$

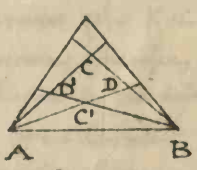

Fig. 11.

Pentru a o aplica, să construim patrulaterul $C'D'CD$, obținut (Fig. 11) ducând două raze prin A și două raze prin B. Integrala dublă, extinsă la acest patrulater, va fi diferența dintre suma valorilor lui θ pentru C și C' și suma valorilor acelorași unghiuri pentru D și D', adică va fi egală cu suma unghiurilor interioare patrulaterului, micșorată cu 2π. Dacă punctul C' vine să se așeze între A și B, unghiul C' devine egal cu π și suma precedentă devine egală cu

$$A + B + C - \pi,$$

A, B, C fiind unghiurile triunghiului ABC. Deci, aria unui triunghi format de trei linii drepte situate în același plan este egală cu

(19) $$K^2(A + B + C - \pi).$$

În cazul când absolutul este imaginar, $A+B+C-\pi$ va fi pozitiv, căci K^2 este pozitiv; va fi un exces al sumei unghiurilor asupra lui π. Când absolutul este o cuadrică convexă și suntem în interior, se înlocuește K^2 cu $-R^2$.

III. O altă aplicație o avem luând ecuația absolutului sub forma redusă.

În cazul Geometriei Riemaniene, unde absolutul poate să aibă forma $x^2+y^2+R^2=0$, aria cuprinsă în interiorul unui domeniu oarecare, va fi dată de integrala (18), care devine

$$\iint \frac{R^2\,dx\,dy}{(x^2+y^2+R^2)^{3/2}},$$

astfel că aria totală a planului Riemanian este $2\pi R^2$. În cazul Geometriei Lobatschewskyene, absolutul are ecuația $x^2+y^2-R^2=0$. Aria unui triunghi, dată de (19), este $R^2\left[\pi-(A+B+C)\right]$, A, B, C fiind măsurile Cayleyene ale unghiurilor. În particular, un triunghi înscris în absolut, are cele trei unghiuri ale sale nule și deci aria sa egală cu πR^2. Cum, de altă parte, putem pava interiorul absolutului cu o infinitate de astfel de triunghiuri, suprafața totală a acestei regiuni este infinită ca și dimensiunile sale liniare.

43. PROPRIETĂȚILE SFERELOR. Suprafețele pe care le-am numit sfere, au ecuații care iau o formă foarte simplă când se raportează absolutul la un tetraedru de referință potrivit ales. Să considerăm un punct A care nu este situat pe absolut. El poate fi totdeauna considerat ca vârful a o infinitate de tetraedre conjugate, și luând unul din acestea ca tetraedru de referință, ecuația absolutului este de forma

$$x^2+y^2+z^2+\varepsilon t^2=0,$$

ε fiind egal cu $+1$ sau -1, după cum este o suprafață imaginară sau convexă.

Fie x, y, z, t coordonatele unui punct al spațiului, pe care le vom presupune că satisfac la condiția

$$t^2+\varepsilon x^2+\varepsilon y^2+\varepsilon z^2=1. \tag{18}$$

Distanța acestui punct la vârful A al tetraedrului, de coordonate $x=y=z=0$, $t=1$, va fi dată de ecuația

$$\cos\frac{\rho}{K}=t. \tag{19}$$

Ținând seamă de (18), avem

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\varepsilon}\sin\frac{\rho}{K}\sin\theta\cos\varphi,\\ y &= \sqrt{\varepsilon}\sin\frac{\rho}{K}\sin\theta\sin\varphi,\\ z &= \sqrt{\varepsilon}\sin\frac{\rho}{K}\cos\theta. \end{aligned} \tag{20}$$

Elementul liniar al spațiului este dat de formula

$$\frac{1}{K^2}ds^2=-dt^2+\varepsilon dx^2+\varepsilon dy^2+\varepsilon dz^2.$$

Înlocuind pe dx, dy, dz, dt cu valorile lor, obținem, ținând seamă de (19) și (20),

$$ds^2=d\rho^2+K^2\sin^2\frac{\rho}{K}\left[d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2\right]. \tag{21}$$

Dacă absolutul este imaginar, K este real; în caz contrar, K este o imaginară pură. În toate cazurile, al doilea termen al sumei (21) ce se adaugă lui $d\rho^2$ este pozitiv.

Din relația (21), vom deduce că în Geometria Cayleyană, ca și în Geometria clasică, linia dreaptă este drumul cel mai scurt de la un punct la altul. În adevăr, să observăm că muchia tetraedrului de referință, definită de ecuațiile $x=y=0$, sau $\theta=0$, este, de fapt, o dreaptă oarecare, pe care vârful A al tetraedrului ocupă o poziție oarecare. Va fi de ajuns deci de a arăta că

proporția este exactă pentru această dreaptă particulară.

Dar, dacă pornim de la vârful A al tetraedrului, pentru care $\rho = 0$, la un punct M al dreptei, ρ variază în mod continuu, de la valoarea zero pe care o putem atribui când este în A, până la o valoare ρ' pe care o ia în M'. Lungimea drumului pe care l'am ales pentru a uni pe A cu M, lungime care are ca valoare integrala

$$L = \int_{\hat{A}}^{M} \sqrt{d\rho^2 + K^2 \sin^2 \frac{\rho}{K} \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2 \right)} \qquad (22)$$

va fi evident mai mare ca integrala

$$\int d\rho ,$$

unde ρ va lua același șir continuu de valori ca și pe drumul considerat. Dar, această ultimă integrală este evident una din valorile pe care le putem da lui $\overline{AM}$. Astfel că lungimea oricărui drum ce unește A cu M va fi superioară în valoare absolută la una din valorile distanței AM. Ea va fi deci superioară la cea mai mică dintre ele și nu poate să devie egală cu ea decât dacă, în integrala (22), se presupune $\sin\theta = 0$, adică $x = y = 0$, și astfel proprietatea enunțată este învederată.

Variabilele ρ, θ, φ, care figurează în (20), constituie un sistem de coordonate curbilinii propriu pentru a reprezenta toate punctele spațiului și este analog cu coordonatele polare din spațiul euclidian. Suprafețele pe care ρ rămâne constant, conțin toate punctele la aceeași distanță de A. Cum acest ultim punct poate fi ales arbitrar în afară de absolut, acestea sunt sferele cele mai generale ale Geometriei Cayleyene.

Fie (S_0) una din aceste sfere de rază ρ. După formula (21), elementul său liniar are expresiunea

$$ds^2 = K^2 \sin^2 \frac{\rho}{K} \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2 \right).$$

Acesta nu diferă de acela care ar corespunde, în spațiul euclidian, unei sfere (S) de rază $\rho' = K \sin \frac{\rho}{K}$. Cum, în ale două sfere, cercurile mari sunt reprezentate prin aceeași ecuație, se vede că formulele Trigonometriei sferice se vor aplica fără modificare în Geometria Cayleyană, cu condiția de a înmodifica convenabil raza sferei considerate.

Se poate obține un rezultat mai exact. Fie $M(x,y,z,t)$, $M'(x',y',z',t')$ două puncte ale căror coordonate verifică ecuația (13), t și t' având amândouă valorile definite de ecuația (19). Distanța MM' a acestor două puncte va fi dată de formula

$$\cos \frac{\overline{MM'}}{K} = tt' + \varepsilon x x' + \varepsilon y y' + \varepsilon z z'.$$

De unde se deduce

$$4\varepsilon \sin^2 \frac{\overline{MM'}}{2K} = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 + \varepsilon (t-t')^2,$$

astfel că, pe o sferă (S_0), pentru care $t = t'$, expresiunea $2\sqrt{\varepsilon} \sin \frac{\overline{MM'}}{2K}$ este totdeauna egală cu distanța euclidiană a două puncte ale căror coordonate rectangulare sunt (x,y,z) și (x',y',z'), care vor aparține deci la o sferă euclidiană de rază $\sqrt{\varepsilon} \sin \frac{\rho}{K}$.

Înmulțind cu $\frac{K}{\sqrt{\varepsilon}}$, se vede că se poate stabili, cu formulele reale,

$$x_1 = K\sin\frac{\rho}{K}\sin\theta\cos\varphi,\quad y_1 = K\sin\frac{\rho}{K}\sin\theta\sin\varphi,\quad z_1 = K\sin\frac{\rho}{K}\cos\theta,$$

o corespondență între un punct M al lui (S_ε) și un punct P al unei sfere euclidiane (S') de rază $K\sin\frac{\rho}{K}$, astfel că expresiunea $2K\sin\frac{MM'}{2K}$ să fie totdeauna egală cu distanța euclidiană a două puncte corespunzătoare pe sfera (S').

IMAGINILE EUCLIDIENE ALE GEOMETRIEI CAYLEYENE.

44. IMAGINEA SFERICĂ A GEOMETRII RIEMANIENE. Să considerăm în planul Π, care conține două drepte perpendiculare Ox, Oy, Geometria Riemaniană, luând ca absolut pseudocercul[1] (cercul imaginar) (T')

$$(T')\qquad x^2+y^2+R^2=0.$$

Să ducem sfera $x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$ de centru C și rază R, tangentă în O la planul Π. La fiecare punct M al planului Π putem face să corespundă cele două puncte unde dreapta CM taie sfera; dintre acestea vom considera pe cel mai apropiat de O, pe care să-l notăm cu m. Conul izotrop cu vârful C, $x^2+y^2+(z-R)^2=0$, taie planul Π după pseudocercul (T'), care servește de absolut. La o dreaptă D din planul Π corespunde pe sferă un cerc mare; punctelor de intersecție ale dreptei D cu (T') corespund punctele de intersecție ale acestui cerc mare cu conul izotrop, care puncte sunt tocmai punctele circulare ale acestui cerc mare.

Din cele studiate, urmează că distanța Cayleyană a două puncte M și M' este egală cu lungimea arcului de cerc mare determinat pe sferă de punctele m și m' corespunzătoare. De asemenea, la o dreaptă din planul Π tangentă la absolutul (T'), corespunde un cerc mare al cărui plan este tangent la conul izotrop, de unde urmează că unghiul Cayleyan a două drepte este egal cu unghiul cercurilor mari care le corespund.

Deci, Geometria Riemaniană din planul Π are ca imagine Geometria sferică pe sfera considerată. Această imagine, sau schemă cum îi zice D-l Appell,[2] are avantajul de a păstra un sens euclidian reprezentărilor distanțelor și unghiurilor în Geometria Riemaniană. Tot de aci se vede de ce spațiul Riemanian este limitat, pentrucă distanțele sunt cunoscute afară de un multiplu de πR, și pentrucă Trigonometria Cayleyană se confundă cu cea sferică.

45. IMAGINEA PLANĂ A GEOMETRII LOBATSCHEWSKYENE PLANE. S'a dat diverse imagini Geometric neeuclidiene a lui Lobatschewsky.

---

(1) Darboux, Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires (1873), p. 211; Rouché et de Combarousse, Traité de Géométrie, 8-e Edition, Géométrie dans l'espace, Note de Poincaré, Sur la Géométrie non euclidienne, pp. 575 – 593.

(2) Appell, Traité de Mécanique rationnelle, t. V, Aperçus de Géométrie Cayleyenne, pp. 170–191.

Următoarea, datorită D-lui Picard[1], se referă la punctele unei jumătăți de plan și se bazează pe transformarea fucksiană

$$Z = \frac{az+b}{cz+d},$$

a, b, c, d fiind reale, astfel ca $ad-bc=1$, iar $z=x+iy$, $Z=X+iY$, $i=\sqrt{-1}$. Înseninând cu z_0 conjugatul lui z, avem

$$dx^2+dy^2 = dz\,dz_0, \quad dZ\,dZ_0 = \frac{dz\,dz_0}{(cz+d)^2(cz_0+d)^2}.$$

De oarece

$$Y = \frac{y}{(cz+d)(cz_0+d)},$$

urmează

$$\frac{dX^2+dY^2}{Y^2} = \frac{dx^2+dy^2}{y^2},$$

adică $\frac{ds}{y}$, $ds^2=dx^2+dy^2$, este un invariant în această transformare.

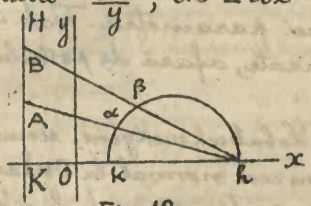

Fig. 12.

Să observăm că prin două puncte α și β (Fig. 12) ale jumătății de plan deasupra lui Ox, trece un cerc ortogonal la axa Ox, pe care o taie în k și h și ale cărora afixe să le notăm cu aceleași litere.

Se vede că raportul anarmonic

$$R(\alpha,\beta,h,k) = \frac{\alpha-h}{\alpha-k} : \frac{\beta-h}{\beta-k}$$

este pozitiv și mai mare ca 1, căci $\left|\frac{\alpha-h}{\beta-h}\right|>1$, $\left|\frac{\beta-k}{\alpha-k}\right|>1$. Să însemnăm cu $D(\alpha,\beta)$ expresiunea $\log R(\alpha,\beta,h,k)$, unde este vorba de logaritmi neperieni. Făcând o inversiune în raport cu punctul h ca centru, se obține o dreaptă KH perpendiculară pe Ox. Raportul anarmonic fiind un invariant față de inversiune, vom obține raportul anarmonic al punctelor K, A, B, H pe dreapta KH, care este egal cu $\frac{KB}{KA}$.

De aci urmează că, fiind date trei puncte α, β, γ în jumătatea de plan și pe același cerc normal la Ox, avem

$$R(\alpha,\beta,h,k)\,R(\beta,\gamma,h,k)\,R(\gamma,\alpha,h,k) = \frac{KB}{KA}\,\frac{KC}{KB}\,\frac{KA}{KC} = 1.$$

Deci

$$D(\alpha,\beta) + D(\beta,\gamma) + D(\gamma,\alpha) = 0,$$

care, fiind proprietatea aditivă a lungimilor pentru trei puncte în linie dreaptă, este natural a se numi $D(\alpha,\beta)$ distanța punctelor α și β.

Să presupunem că punctele α și β sunt două puncte infinit apropiate, $z, z+dz$. Am văzut că

$$R(z, z+dz, h, k) = \frac{KB}{KA} = 1 + \frac{AB}{AK}.$$

De oarece pe KAB (Fig. 12), AB este creșterea lui KA și din cauza invarianței lui $\frac{ds}{y}$, urmează

$$\frac{ds}{y} = \frac{AB}{AK}.$$

Deci

$$\log R(z, z+dz, h, k) = \log\left(1+\frac{ds}{y}\right),$$

---

[1] Picard, Deux leçons sur certaines équations fonctionnelles et la Géométrie non-euclidienne, Bulletin des Sciences mathématiques, 1922, p. 425.

și acest logaritm este egal cu $\frac{ds}{y}$, afară de infiniți mici de ordin superior. Prin urmare

$$D(z, z+dz) = \frac{ds}{y},$$

adică distanța infiniterimală este un invariant.

Acestea fiind stabilite, putem da, pe jumătatea de plan considerat, o imagine a Geometriei neeuclidiene a lui Lobatschewsky a planului întreg. Vom numi drepte jumătățile de cercuri normale axei Ox. Distanța a două punete α și β este expresia $D(\alpha, \beta)$ definită mai sus, care se bucură de proprietatea aditivă a distanțelor pentru punete situate în linie dreaptă neeuclidiană.

Două segmente egale $\alpha\beta$ și $\alpha'\beta'$ pot fi aduse să coincidă cu substituția

$$\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right),$$

de unde se vede că deplasările precedente depind de trei parametrii. Toate ipotezele Geometriei Lobatschewskyene sunt deci realizate, afară de postulatul paralelelor.

Fig. 13.

După definiția distanței Lobatschewskyene, urmează că o dreaptă (în imagine un cerc normal la Ox) are două punete la infinit, care în fig. 12 sunt h și K. Se vede deci, că fiind dată o dreaptă Lobatschewskyană D, se poate duce prin punctul A al planului două paralele la această dreaptă, adică două drepte care o întâlnesc pe aceasta la infinit: Dreapta D fiind reprezentată de cercul C de diametru Kh (Fig. 13), cele două paralele sunt reprezentate de cercurile ce trec prin A, tangente în h și K la cercul C și ortogonale axei Ox. Printre dreptele ce trec prin A, unele întâlnesc pe D, altele nu o întâlnesc: vor fi deci secante și nesecante, separate de cele două paralele. Partea liniată din fig. 13 corespunde cercurilor normale la Ox, nesecante cercului C, din interiorul unghiului de paralelism.
În ce privește unghiurile, unghiurile neeuclidiene sunt identice cu unghiurile imaginei pe jumătatea de plan.

Tot cu ajutorul acestei imagini, se vede că în Geometria Lobatschewskyană sunt triunghiuri ale căror toate unghiurile sunt nule; așa, de ex., considerând punctele α, β, γ ale axei Ox, cercurile descrise pe $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\alpha\gamma$ ca diametre, dau imaginea laturilor triunghiului cu unghiurile nule, căci cercurile sunt tangente în α, β, γ.

De asemenea, două drepte nesecante și neparalele, au o perpendiculară comună, căci, în jumătatea de plan este un cerc ortogonal la două cercuri date, și care are centrul în punctul unde axul radical al celor două cercuri taie axa Ox.

Să considerăm acum cercurile Lobatschewskyene, adică locul extremităților dreptelor neeuclidiene de lungime constantă trecând prin punctul dat A. Înseamnând cu a afixul punctului A și cu a_0 afixul conjugatului A_0 (Fig. 14) (A și A_0 simetrice în raport cu Ox), substituțiile liniare de tipul considerat mai sus sunt $\frac{Z-a}{Z-a_0} = e^{i\theta}\frac{z-a}{z-a_0}$,

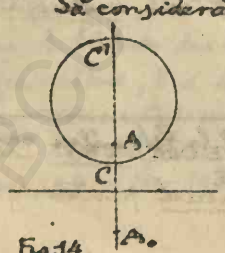

Fig. 14.

și corespund la o rotație de unghiul θ. B fiind un punct dat de afix b, locul punctelor B', astfel ca AB' să fie egală cu distanța AB (cercul Lobatschewskyan de centru A), este dat de ecuația

$$\frac{Z-a}{Z-a_0} = e^{i\theta}\frac{b-a}{b-a_0},$$

unde θ este variabil, iar Z este afixul punctului B'. Cum $e^{i\theta}$ descrie un cerc, Z va descrie un cerc. Deci, cercul Lobatschewskyan are ca imagine un cerc al semănătății planului. Acest cerc taie perpendiculara prin A la Ox (Fig. 14) în două puncte C și C' conjugate armonic în raport cu A și A_0, iar CC' este un diametru al acestui cerc. Se vede, de asemenea, că un cerc Lobatschewskyan este perpendicular la razele sale, adică la dreptele neeuclidiene ce trec prin centrul său. Am văzut că un cerc al semănătății de plan ce nu taie axa Ox, reprezintă un cerc Lobatschewskyan. Centrul acestuia corespunde punctului A pe diametrul perpendicular pe Ox, astfel ca A și A_0 să fie conjugate în raport cu cercul.

Să considerăm, în particular, un cerc al semănătății de plan tangent axei Ox în punctul H (Fig. 14). Acest cerc reprezintă o curbă normală la o infinitate de drepte Lobatschewskyene paralele (cercurile ortogonale în H la Ox). Avem deci în planul Lobatschewskyan o curbă ale cărei normale sunt drepte paralele Lobatschewskyene. O astfel de curbă a fost numită de Lobatschewsky horiciclu și poate fi privit ca limita unui cerc al cărui centru se depărtează indefinit. În adevăr, în fig. 14, avem $\overline{HA}^2 = HC \cdot HC'$ și cum $HC = 0$, rezultă $HA = 0$, deci centrul neeuclidian corespunzător lui A se depărtează nemărginit.

În Geometria Lobatschewskyană fiind dată o dreaptă, locul punctelor echidistante de această dreaptă nu este o dreaptă, ci cercuri care taie axa Ox în cele două puncte de intersecție ale lui Ox cu semănătatea de cerc ce reprezintă dreapta. Aceste curbe au fost numite de Lobatschewsky hypercicle, și sunt cercuri ale căror toate razele sunt perpendiculare la aceeași dreaptă.

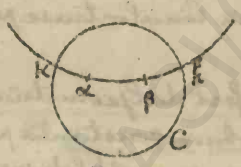

Fig. 15.

Putem da altă imagine a Geometriei Lobatschewskyene, în interiorul unui cerc C, transformând, cu ajutorul unei anversiuni, semănătatea de plan în interiorul cercului C (Fig. 15). Dreptele corespund atunci la cercuri ortogonale cercului C. Două puncte α și β determină o dreaptă și logaritmul raportului anarmonic, luat ca mai sus, al punctelor α, β, h, K, este distanța punctelor α și β. Presupunând că semănătatea de plan este transformată în interiorul cercului $X^2 + Y^2 = 1$, se găsește că elementul liniar este

$$\frac{dX^2 + dY^2}{(1 - X^2 - Y^2)^2}.$$

46. ALTĂ REPREZENTARE CONFORMĂ A GEOMETRII LOBATSCHEWSKYENE. În afară de imaginea dată de Poincaré pentru Geo-

metria Lobatschewskyană [1], considerând un iperboloid de rotație cu două pânze, o altă reprezentare conformă a acestei Geometrii neeuclidiene a fost dată de D-l Cartan [2] în modul următor. Să înscriem în conul de rotație cu vârful H o sferă Σ tangentă conului de-alungul cercului Γ'. Fie Γ cercul de intersecție al acestui con cu planul (Π) (Fig. 16), perpendicular pe axa conului. Vom considera în planul (Π) Geometria Lobatschewskyană, luând ca absolut cercul Γ. Lăsând deoparte calota sferei dinspre H, să observăm că la orice punct M al planului (Π) corespunde un punct M' pe sferă la intersecția ei cu dreapta HM. La o dreaptă P_1P_2 din planul (Π) corespunde pe sferă un arc de cerc ortogonal cercului Γ'. Această reprezentare conservă unghiurile. În adevăr, să considerăm unghiul dreptelor MT, MT_1 în planul Lobatschewskyan. Planul tangent în M' la sferă taie conul după o conică ce are M' ca focar. Deci unghiul Lobatschewskyan este unghiul euclidian, căci dreptele izotrope se conservă. Se vede că cercurile se conservă în această reprezentare. Deci, avem o reprezentare conformă a planului Lobatschewskyan pe o sferă.

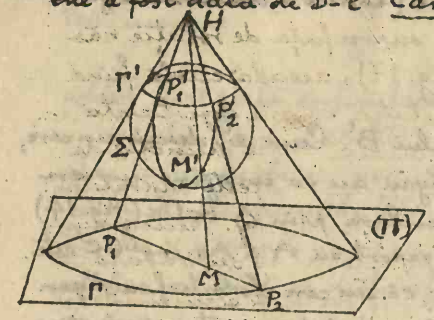

Fig. 16.

După cum vedem, găsirea imaginei Geometriei Cayleyene stă în strânsă legătură cu teoria suprafețelor aplicabile, care constă în deformarea uneia din ele (fără a altera lungimile liniilor trase pe această suprafață și unghiurile sub care aceste linii se taie), astfel ca să o putem aplica pe o altă suprafață fără rupturi și îndoituri. Știm că o geodezică a unei suprafețe este prin definiție drumul cel mai scurt de la un punct la altul pe această suprafață. Deci, dacă două suprafețe sunt aplicabile, geodezicele uneia corespund geodezicelor celeilalte, căci deformarea nealterând lungimile, conservă geodezicele.

Curbura totală a unei suprafețe este inversa produsului celor două raze de curbură principale. Se arată că condiția necesară și suficientă pentru ca o suprafață să fie aplicabilă pe o sferă de rază R, este ca această suprafață să aibă curbura totală constantă și egală cu $\frac{1}{R^2}$. O sferă este aplicabilă într'o infinitate de moduri pe ea însăși; deci, o suprafață cu curbura totală constantă va fi aplicabilă pe ea însăși într'o infinitate de moduri. Prin urmare, Geometria liniilor trase pe o suprafață va fi aceeași ca Geometria liniilor trase pe o suprafață aplicabilă pe prima.

Dar, am văzut că Geometria plană a lui Riemann nu diferă de Geometria pe o sferă; ea nu va diferi de Geometria suprafețelor cu curbura constantă pozitivă. Triunghiurile ale căror laturi sunt trei geodezice trase pe o astfel de suprafață, vor avea suma unghiurilor mai mare ca două drepte și elementele vor fi

(1) A se vedea nota lui Poincaré, Sur la Géométrie non euclidienne, în Traité de Géométrie, 8-e éd., Géom. dans l'espace, pp. 575-593.

(2) În Cursul său de Geometrie superioară, La Géométrie des espaces de Riemann, profesat la Sorbona, în 1925-1926.

legate cu formulele Trigonometriei sferice.

Dar sunt şi suprafeţe cu curbura constantă negativă, cunoscute sub numele de suprafeţele lui Beltrami, cum este suprafaţa de rotaţie născută de curba tractrice în jurul asimptotei (Fig. 17), această curbă fiind caracterizată prin proprietatea că este constantă porţiunea din tangenta cuprinsă între punctul de contact şi asimptotă. Geometria pe aceste suprafeţe nu diferă de aceea a lui Lobatschewsky. Triunghiurile ale căror laturi sunt trei geodezice trase pe o astfel de suprafaţă, vor avea suma unghiurilor mai mică de cât două drepte şi elementele lor vor fi legate cu formulele Trigonometriei plane Lobatschewskyene.

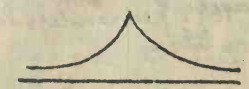

Fig. 17.

Aceste imagini ale Geometriei Cayleyene, aceste dicţionare, cum le numia Poincaré, ne fac să înţelegem oarecare proprietăţi ale Geometriilor neeuclidiene, pe care nu le poate prinde intuiţia noastră obişnuită cu spaţiul euclidian în care presupunem că trăim.

Cum Universul real (Spaţiul-Timp) este o multiplicitate Riemanniană cu patru dimensiuni, Geometria Spaţiilor lui Riemann a luat o mare dezvoltare. Această Geometrie poate fi concepută ca studiul unei forme cuadratice de diferenţiale $\sum g_{ik}\,dx_i\,dx_k$, definită pozitiv, adică ce se descompune într-o sumă de pătrate. Se poate concepe însă o Geometrie mai generală, ca studiul unei forme cuadratice oarecare de diferenţiale, cum este în Relativitatea generalizată. De altfel, toate aceste Geometrii pot fi construite pornind de la ideea de grup.[1]

---

(1) Pentru mai multe detalii, a se vedea: Weyl, Temps, espace et matière, 1922; Becquerel, Exposé élémentaire de la Théorie d'Einstein (Collection Payot, 1922); Darmois, Eléments de Géométrie des espaces (Annales de Physique, 1924); Bouligand, Leçons de Géométrie vectorielle, 1924; Cartan, La théorie des groupes et les recherches récentes de Géométrie différentielle (L'Enseignement mathématique, vol XXIV, 1924-1925); Cartan, La Géométrie des espace de Riemann (Mémorial des Sciences mathématiques, fasc. IX, 1925).

TABLA DE MATERII.

Pag.

Generalităţi. Istoric. 3

NOŢIUNI INTRODUCTIVE.

Elemente de la infinit. Elemente imaginare. 6

Coordonate tetraedrice. Generalităţi. Raportul anarmonic a patru puncte ale unei drepte. Raportul anarmonic al unui fascicol de patru plane. Ecuaţia unei cuadrice conjugată în raport cu tetraedrul de referinţă. 9

Noţiuni asupra omologiei. 14

Figuri corelative. Coordonate tangenţiale. Principiul dualităţii. Figuri corelative . . . . . 17.

DEFINIŢIUNI METRICE.

Relaţii metrice în plan. Conicele şi diviziunile omografice. Definiţia unghiului, abscisei şi a distanţei. Relaţiunea lui Lagarre. Extinderea relaţiunilor trigonometrice la triunghiurile imaginare. 22

Relaţii metrice în spaţiu. Distanţa dintre două puncte. Definiţia unghiului. 27

NOŢIUNI DE GEOMETRIE SFERICĂ.

Generatoarele reciliniu ale sferei. Expresiunea distanţei a două puncte ale sferei. Relaţiunea metrică fundamentală relativă la o generatoare reciliniu a sferei. Formulele Trigonometriei sferice. 29

NOŢIUNI ASUPRA DEPLASĂRILOR ÎN GEOMETRIA EUCLIDIANĂ CLASICĂ ŞI IPERBOLICĂ.

Deplasările în Geometria euclidiană clasică cu două dimensiuni. Deplasările în Geometria euclidiană clasică cu trei dimensiuni. Deplasările în Geometria euclidiană clasică cu patru dimensiuni. Geometria euclidiană iperbolică cu două dimensiuni. Geometria pseudo-euclidiană iperbolică cu trei şi patru dimensiuni. 33

GEOMETRIA NEEUCLIDIANĂ. GEOMETRIA CAYLEYANĂ.

Definiţii metrice. Origina Geometriei Cayleyene. Distanţa a două puncte. Unghiul a două plane sau a două drepte. Difinitele cazuri particulare ale Geometriei Cayleyene. Geometria Riemanniană. Geometria Lobatschewskyană. Geometria Cayleyană cuprinde ca un caz limită Geometria euclidiană. Discuţia formulei care dă distanţa a două puncte. Propoziţiuni relative la unghiuri. Relaţiuni între elementele reale în Geometria Riemanniană şi Lobatschewskyană. Propoziţiuni relative la două drepte care nu se taie. Distanţa de la un punct la un plan şi la o dreaptă. Formule relative la curbe şi suprafeţe. 52

Deplasările Cayleyene. Generalităţi. Studiul cazului unde generatoarele unui sistem nu sunt deplasate de transformare. Studiul cazului general al deplasărilor. 67

Analiza Cayleyană. Trigonometria. Volumul. Aria. Proprietăţile sferelor. 74

Imaginile euclidiene ale Geometriei Cayleyene. Imaginea sferică a Geometriei Riemanniene. Imaginea plană a Geometriei Lobatschewskyene. Altă reprezentare conformă a Geometriei Lobatschewskyene. . . . 82

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY